応用線形代数—第４回レポート

東京工業大学　情報理工学院　数理・計算科学系
福田光浩

２０１８年度 第１クォーター

提出〆切　５月８日（火）　１６時５０分まで

レポートボックス １ー４　応用線形代数

1.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

としたとき，X が張る（部分）空間を $S = \mathrm{span}(X)$ と呼ぶ．このとき，S の直交補空間 $S^{\perp}$ と $S^{\perp}$ の次元と $S^{\perp}$ の基底を一つ求めよ．

2. ２次元の点（ベクトル）を $(0.5, 0.6)$, $(0, 6)$, $(1, 6.3)$ とする．これらの点を授業で習った意味で最も良く当てはめる２次曲線を求めよ．

3. $\mathbb{R}^n$ のある部分空間を S としたとき，$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ を S へ射影する行列 $\boldsymbol{P}$ を射影行列と呼ぶ．つまり，$\boldsymbol{c} := \boldsymbol{P}\boldsymbol{b} \in S$ が成り立つときである．$\boldsymbol{P}$ が射影行列であれば，$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$ であることが知られている．また，その補空間に射影する行列を補射影行列 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ と呼ぶ．ただし，$\boldsymbol{I}$ は単位行列とする．

   (a) 授業で習った直交射影行列を $\boldsymbol{P}$ と呼ぶと，$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{P}$ が成り立つことを確認せよ．

   (b) $\boldsymbol{P}$ を一般の射影行列とし，つまり，必ずしも直交射影行列であるという仮定を用いないで $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$ が成り立つとき，$\boldsymbol{P}$ によって（射影されて）定義された部分空間とその補射影行列によって定義された部分空間が（お互いに）直交している（部分空間である）ことを示せ．

4. シュミットの正規直交化法を用いて，次の $\mathbb{R}^4$ のベクトルを正規直交化せよ．

$$\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$