

集合と位相 第二 第10回 分離公理と連続写像 補足

2.4.6 位相的性質と相対位相, 積位相

命題 2.4.6.A. 1) T_1 空間の任意の部分空間は T_1 である.

2) Hausdorff 空間の任意の部分空間は Hausdorff である.

証明. どちらも T_1 空間, Hausdorff 空間と部分空間 (相対位相) の定義から明らか. (Q.E.D.)

命題 2.4.6.B. 正則空間の任意の部分空間は正則である.

証明. 教科書参照. ここでは教科書の証明の最後の2文の説明だけを行なう.

A における V' の閉包を F とすれば, $\overline{V'} \cap A$ ($\overline{V'}$ は X における $V' = V \cap A$ の閉包) が V' を含む, A における閉集合であり, F は V' を含む, A における最小の閉集合なので, $F \subset \overline{V'} \cap A$ だから

$$a \in V' \subset F \subset \overline{V'} \cap A \subset \overline{V'} = \overline{V \cap A} \subset \bar{V} \subset \tilde{U}$$

となる. したがって, $a \in V' \subset F \subset \tilde{U} \cap A = U$ となり, 命題 2.11 1) (教科書 pp. 98–99) から A は T_3 空間となる. (Q.E.D.)

命題 2.4.6.C. 正規空間の任意の閉部分空間は正規である.

証明. 命題 2.4.6.A 1) と次の命題 2.4.6.D の系として得られる. (Q.E.D.)

命題 2.4.6.D. T_4 空間の任意の閉部分空間は T_4 である.

証明. X を T_4 空間, F を X の閉集合とする. F_1 を X の部分空間 F の任意の閉部分集合とすると, X の閉集合 $\tilde{F}_1$ が存在して $F_1 = F \cap \tilde{F}_1$ となるが, F は X の閉集合なので F_1 も X の閉集合である.

F_1, F_2 を部分空間 F の閉集合で $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ なるものとする. 上で確認したことから F_1 と F_2 は X の閉集合であり, X は T_4 空間だから, X の開集合 U, V で, $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する. このとき, $F_1 \subset U \cap F$, $F_2 \subset V \cap F$, $(U \cap F) \cap (V \cap F) = \emptyset$ であり, $U \cap F$ と $V \cap F$ は部分空間 F の開集合である. 以上から F は T_4 空間である. (Q.E.D.)

以下, $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を空でない位相空間の族, $X \triangleq \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ をその直積空間とする.

補題 2.4.6.A. $\lambda \in \Lambda$ とし, すべての $\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$ に対して $x_\mu \in X_\mu$ とするとき, X の部分空間

$$Y \triangleq X_\lambda \times \{(x_\mu)_{\mu \neq \lambda}\} = \{(y_\lambda) \mid \forall \mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}; y_\mu = x_\mu\} \subset X$$

は X_λ と同相である.

証明. 写像 $f: Y \rightarrow X_\lambda$ を射影 $p_\lambda: X \rightarrow X_\lambda$ の Y への制限 $p_\lambda|_Y$ とする. 明らかに f は全単射であり, p_λ が連続であることから f も連続である (連続写像の部分空間への制限が連続写像であることは用意に示せる). f が開写像であることを示すには, 下に示す補題 2.4.6.B より, Y の開基の任意の元の像が開集合であることを示せばよい. X の開基の元 $\prod_{\mu \in \Lambda} U_\mu$ (ただし, すべての $\mu \in \Lambda$ について U_μ は X_μ の開集合であり, かつ有限個の μ を除いて $U_\mu = X_\mu$) と Y との共通集合の全体が Y の開基をなし, その任意の元は $U_\lambda \times \{(x_\mu)_{\mu \neq \lambda}\}$ と表せる. このとき, f によるその像は U_λ となる. よって f は開写像である. 以上から, f は同相写像である. (Q.E.D.)

補題 2.4.6.B. X と Y を位相空間, $\mathcal{V}$ を X の開基, $f: X \rightarrow Y$ とする.

$$f \text{ が開写像} \iff \forall V \in \mathcal{V}; f(V) \text{ が } Y \text{ の開集合.}$$

証明. $(\Rightarrow)$ 明らか.

$(\Leftarrow)$ U を X の開集合とすると, $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ となる $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{V}$ が存在する. よって, $f(U) = f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(V_\lambda)$ より (2 番目の等号は集合と位相第一で学習済み), $f(U)$ は Y の開集合である. (Q.E.D.)

命題 2.4.6.E. 1) X が Hausdorff 空間 $\implies \forall \lambda \in \Lambda; X_\lambda$ は Hausdorff 空間.

2) X が正則空間 $\implies \forall \lambda \in \Lambda; X_\lambda$ は正則空間.

証明. Hausdorff 空間と同相な位相空間は Hausdorff 空間であり, 正則空間と同相な位相空間は正則であることに注意すれば, 補題 2.4.6.A, 命題 2.4.6.A 2), 命題 2.4.6.B より明らか. (Q.E.D.)

次の命題 2.4.6.F は, 授業 第 7 回「Hausdorff 空間」で学習済み.

命題 2.4.6.F. Hausdorff 空間の族の直積空間は Hausdorff 空間である.

命題 2.4.6.G. 正則空間の族の直積空間は正則である.

証明. 正則空間であることは Hausdorff かつ T_3 であることと同値だから, 命題 2.4.6.F と次の命題 2.4.6.H の系として得られる. (Q.E.D.)

命題 2.4.6.H. T_3 空間の族の直積空間は T_3 空間である.

証明. すべての $\lambda \in \Lambda$ について X_λ が T_3 空間であるとし, $x = (x_\lambda) \in X = \prod_\lambda X_\lambda$ を任意の点, U を x の X における開近傍とする. このとき, 有限個の λ_i と X_{λ_i} の開集合 U_i が存在して

$$x \in \prod_i U_i \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda \subset U$$

とできる. ここで, X_{λ_i} が T_3 であることと命題 2.11 1) から, X_{λ_i} の開集合 V_i で $x_{\lambda_i} \in V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ となるものが存在する. そこで

$$V \triangleq \prod_i V_i \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$$

とおけば、下に示す補題 2.4.6.C から

$$x \in V \subset \bar{V} \subset U$$

となるので、 X は T_3 空間である. (Q.E.D.)

補題 2.4.6.C. Λ_0 を Λ の有限部分集合、各 $\lambda_i \in \Lambda_0$ について V_i を X_{λ_i} の開集合、 $V \triangleq \prod_{\lambda_i \in \Lambda_0} V_i \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0} X_\lambda$ とするとき、

$$\bar{V} = \prod_{\lambda_i \in \Lambda_0} \bar{V}_i \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0} X_\lambda.$$

証明. $x = (x_\lambda) \in \bar{V} \iff \forall \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \ni x$ (すべての $\lambda \in \Lambda$ について U_λ は X_λ の開集合であり、有限個の $\lambda \in \Lambda$ を除いて $U_\lambda = X_\lambda$); $\emptyset \neq V \cap \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \prod_{\lambda_i \in \Lambda_0} (V_i \cap U_{\lambda_i}) \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0} U_\lambda \iff \forall \{U_{\lambda_i}\}_{\lambda_i \in \Lambda_0}$ (各 U_{λ_i} は x_{λ_i} の X_{λ_i} における開近傍); $V_i \cap U_{\lambda_i} \neq \emptyset \iff \forall \lambda_i \in \Lambda_0; x_{\lambda_i} \in \bar{V}_i \iff x = (x_\lambda) \in \prod_{\lambda_i \in \Lambda_0} \bar{V}_i \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0} X_\lambda$. (Q.E.D.)

正規空間の族の直積空間は必ずしも正規ではない (例は省略).

例 2.14 Hausdorff 空間の商空間で Hausdorff でないものの例 :

Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$X \triangleq \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

は Hausdorff 空間である ($\because$ 命題 2.4.6.A 2)). X 上に同値関係 $\sim$ を

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x = x' \text{ かつ } [y = y' \text{ または } x < 0]$$

により定義すれば、 $X/\sim$ は Hausdorff 空間ではない. 2 点 $[(0, 1)]$, $[(0, -1)]$ が開集合により分離されないからである.

$\because$ $\pi: X \rightarrow X/\sim$ を標準的射影とし、 U を $[(0, 1)]$ の $X/\sim$ における開近傍、 V を $[(0, -1)]$ の $X/\sim$ における開近傍とする. このとき、 $\pi^{-1}(U)$ は $(0, 1)$ の X における開近傍なので、 $\exists \varepsilon_1 > 0$ s.t. $U_X \triangleq \{(x, 1) \mid -\varepsilon_1 < x < \varepsilon_1\} \subset \pi^{-1}(U)$. 同様に、 $\exists \varepsilon_2 > 0$ s.t. $V_X \triangleq \{(x, -1) \mid -\varepsilon_2 < x < \varepsilon_2\} \subset \pi^{-1}(V)$. $\varepsilon \triangleq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \emptyset \neq \{(x, 1), (x, -1)\} \mid -\varepsilon < x < 0 \} &\subset \pi(U_X) \cap \pi(V_X) \\ &\subset \pi(\pi^{-1}(U)) \cap \pi(\pi^{-1}(V)) \subset U \cap V \end{aligned}$$

より、 $U \cap V = \emptyset$ とはできない. $\square$

教科書 例 2.15 は、

第 1 可算公理を満たす位相空間の商空間で第 1 可算公理を満たさないものが存在し、
第 2 可算公理を満たす位相空間の商空間で第 2 可算公理を満たさないものが存在する
ことを示す例だが、未学習の位相空間の直和を用いているため、本講義では扱わない.