*Oct. 20, 2018*

# 集合と位相 第二　第6回 直積位相　補足

**定義 2.3.3.A** $\{(X_\lambda, \mathcal{U}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$: family of top. sps., $X \triangleq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, $\mathcal{U}$: top. on $X$.
$\mathcal{U}$：**強位相** (strong top.) または**箱位相** (box top.)
$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \;\middle|\; \forall\lambda\in\Lambda;\ U_\lambda \in \mathcal{U}_\lambda\right\}$ が $\mathcal{U}$ の base.

（通常の直積位相は弱位相 (weak top.) と呼ばれることがある.）

**命題 2.3.3.A** $\mathcal{V} \triangleq \left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \;\middle|\; \forall\lambda\in\Lambda;\ U_\lambda \in \mathcal{U}_\lambda\right\}$ はある開集合系の base である.
**証明.** 第 3 回補足資料の定理 2.2.2.A より，$\mathcal{V}$ が次の 2 条件を満たすことを示せばよい.

1) $X = \bigcup \mathcal{V}$

2) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, $\forall x \in V_1 \cap V_2$, $\exists V \in \mathcal{V}$ s.t. $x \in V \subset V_1 \cap V_2$.

1) 明らかに $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathcal{V}$.
2) 任意に $V_1,\ V_2 \in \mathcal{V}$ とすると，$\mathcal{V}$ の定義から $V_1 = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^1,\ V_2 = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^2$, $\forall\lambda\in\Lambda;\ U_\lambda^1, U_\lambda^2 \in \mathcal{U}_\lambda$ と表せる．$V_1 \cap V_2 = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^1 \cap \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^2 = \prod_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda^1 \cap U_\lambda^2)$ であって，$\forall\lambda\in\Lambda;\ U_\lambda^1 \cap U_\lambda^2 \in \mathcal{U}_\lambda$ であることから $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$ なので，2) が従う. (Q.E.D.)

**注意 2.3.3.A**

1) 直積の添え字集合 $\Lambda$ が有限集合の場合，強位相と弱位相は一致する.

2) 添え字集合 $\Lambda$ が無限集合の場合，一般に強位相と弱位相は異なる.

3) 添え字集合 $\Lambda$ が無限集合であっても，強位相と弱位相が一致する場合がある.

**証明.** 1) 定義から明らか.
2) 下の反例（例 2.3.3.A）による.
3) その下の例（例 2.3.3.B）による．(Q.E.D.)

**例 2.3.3.A** $\Lambda$ を無限集合とし，各 $\lambda\in\Lambda$ に対して離散位相を持つ $X_\lambda \triangleq \{0,1\}$ を考え，$X \triangleq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく．各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $O_\lambda \triangleq \{0\}$ とし，$O \triangleq \prod_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ を考える．$O_\lambda$: open in $X_\lambda$ より強位相の定義から，$O$ は強位相に関して open である．$O$ は空でなく，弱位相の基 $\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \;\middle|\; \forall\lambda\in\Lambda;\ U_\lambda \in \mathcal{U}_\lambda,\ \text{有限個の}\ \lambda\ \text{を除き}\ U_\lambda = X_\lambda\right\}$ の要素 $\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を部分集合に持たないので，弱位相の基に属する集合の合併集合では表せない．すなわち $O$ は弱位相に関して open ではない.

**例 2.3.3.B** $\Lambda$: 無限集合，$\forall\lambda\in\Lambda;\ X_\lambda$：密着位相空間とすると，定義から明らかに，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上の強位相と弱位相は どちらも $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上の密着位相なので一致する.