講義名　連続体力学　配付資料　OCW

第 6 回　材料力学における応力テンソル

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．はじめに

今回は，応力テンソルに関する材料力学的な定義を解説する．また，その応用としてモールの応力円について議論する．

２．応力テンソルから応力ベクトルの成分を求める．

ここでは，材料力学における応力テンソルの考え方を導入する．簡単のため，2 次元問題について考える．内部応力状態の単位厚さの物体があり，その中の任意の点 P での応力テンソルの成分 σ_x，σ_y，τ_{xy} が既知であるとする．図 1 に示すように，点 P の近傍に点 B と点 C を取り，微小 3 角柱 PBC を考える．この三角柱の斜面 BC を点 P における仮想断面とみなす．

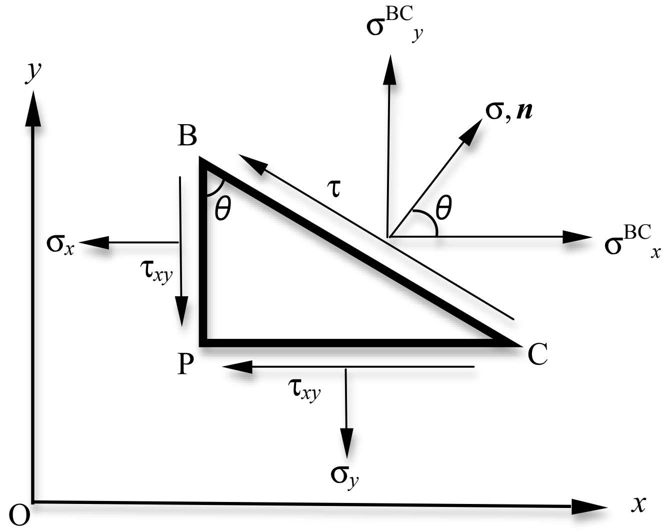

図 1　微小体積における釣り合い

まず，x 軸方向，y 軸方向の力の釣り合いを考えると，

$$\begin{cases} \sigma_x^{BC}\cdot S-\sigma_x\cdot S\cos\theta-\tau_{xy}\cdot S\sin\theta=0 \\ \sigma_y^{BC}\cdot S-\sigma_y\cdot S\sin\theta-\tau_{xy}\cdot S\cos\theta=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \sigma_x^{BC}=\sigma_x\cos\theta+\tau_{xy}\sin\theta & (1) \\ \sigma_y^{BC}=\sigma_y\sin\theta+\tau_{xy}\cos\theta & (2) \end{cases}$$

となる．このように，応力テンソルの成分が既知であれば，任意の法線を持つ仮想断面における応力ベクトルの成分を計算することができる．

３．応力テンソルの変換則

前節の結果を用いて，法線方向の成分σ，平行方向の成分τを求めてみる．図1を参照して，方向余弦をかけてから，足し合わせると，

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \sigma_x^{BC}\cos\theta + \sigma_y^{BC}\sin\theta \\
&= \left(\sigma_x\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\sigma_y\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta\right)\sin\theta \\
&= \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau &= -\sigma_x^{BC}\sin\theta + \sigma_y^{BC}\cos\theta \\
&= -\left(\sigma_x\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta\right)\sin\theta + \left(\sigma_y\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta\right)\cos\theta \\
&= \tau_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) - \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\theta\cos\theta \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となる.

（以下省略）

４．主応力

さて，(4)式より，剪断応力τがゼロとなる方向θがあることがわかる．$\tau=0$として整理すると，

$$
\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{1}{2}\tan 2\theta \qquad (10)
$$

となる．ある角度θ_0で(10)式が成り立てば，$\theta_0 \pm \frac{\pi}{2}$でも成り立つので，直交する 2 つの方向で$\tau$が 0 になることがわかる．これらの方向を主方向とよび，このときの垂直応力を主応力と呼ぶ.

(以下省略)

５．応力テンソル成分の符号

応力テンソルには，添え字が 2 つ付いているが（σ_xはσ_{xx}を略記したもの），第 1 の添え字が対象としている面の外向き面法線の方向を表し，第 2 の添え字がその面に作用している力の方向を表している．外向き面法線が座標軸の正の方向を向いている場合，力の方向も座標軸の正の方向の向いているテンソルの成分を正とする.

（以下省略）

６．モールの応力円

６．１　主応力が与えられた時

主応力状態$\left(\sigma_x, \sigma_y, 0\right)$が既知であった時，主軸である x 軸から$+\theta$ (>0)の角度だけ半時計回りに回転した方向に法線を持つ仮想断面を考える．この仮想断面における垂直応力テンソルσと剪断応力テンソルτは，(11)式と(12)式に基づいて代数的に計算することもできるが，これを図的に求める方法がモールの応力円である．

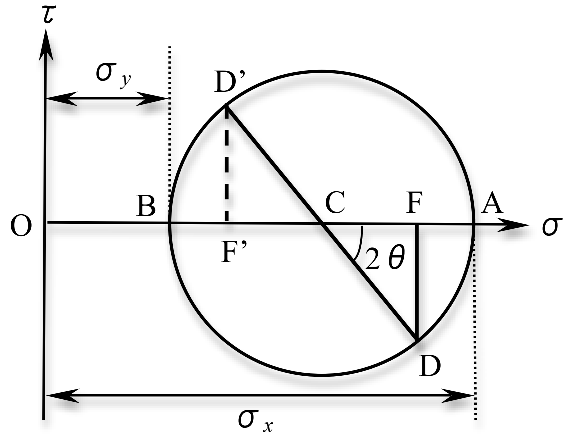

図 3　モールの応力円

横軸にσを，縦軸にτを取ると図 3 のようになる．まず，主応力であるσ_xとσ_yを横軸上（σ軸上）にプロットして（ここでは，$\sigma_x > \sigma_y$とする），図 4 中の点 A と点 B を得る．この 2 点を直径とする円を描き，図 1 での角度θ (>0)と逆の回転方向に（すなわち時計回りに），図 3 の円周上の角度 2θ の位置に点を取り，点 D とすると，点 D の座標が，丁度，（σ，τ）となっていることがわかる

最大の剪断応力は，応力円の半径で与えられるので，

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \qquad (16)$$

となり，これは，$\theta = \pm\pi/4$ の点に対応し，2 つの主応力の間の角を 2 等分する点に生じる．

６．２　純粋剪断応力状態

（省略）

６．３　一般の応力状態

（省略）