

第 2 回 ダランベールの原理

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. はじめに

今回の講義では、まず、前半でダランベールの原理について説明する。これを用いると、動力学の問題を静力学の問題として解くことができ、さらに、前回の仮想仕事の原理を適用すると動力学問題も簡単に解くことができるようになる。また、後半では、ダランベールの原理の応用として、ラグランジュ方程式の導出を示す。ラグランジュ方程式の実際の使い方は、次回の講義で述べる。

2. ダランベールの原理

n 個の質点からなる質点系を考える。 i 番目の質点の質量を m_i とし、その質点に作用する合力ベクトルを F_i^{total} とすると、ニュートンの運動方程式は、前回示したように、

(1)

ここで、 p_i は i 番目の質点の運動量ベクトルであり、

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} m_i v_i = m_i \ddot{r}_i \quad (i=1, n) \quad (2)$$

となる。ここで、 r_i は i 番目の質点の位置ベクトルである。(2) 式を (1) 式に代入して、次のように書き換えてみる。

(3)

このようにしてみると、実際に質点に作用している合力ベクトル F_i^{total} と慣性力ベクトル $m_i \ddot{r}_i$ とが釣り合っているというように解釈することができる。すなわち、動力学問題においても慣性力ベクトルを考慮すれば、静力学問題として解くことができることになる。これをダランベールの原理という。

(以下省略)

<例題 1> 右図に示した重量 W と $2W$ の 2 つの物体が鉛直面内で滑車を介して吊されている。重量 W の物体に重量 Q なる物体を付加して、鉛直下方への加速度 a となるようにするには、重量 Q をどのくらいにすればよいか？

(以下省略)

3. 一般化座標

デカルト座標 (x, y, z) はそれぞれ長さの次元を持つが、よく使われる球座標 (r, θ, ϕ)

では、 θ や ϕ は長さの次元を持っていない（ dr は長さの次元を持っているが、 $d\theta$ や $d\phi$ は長さの次元をもっておらず、 $rd\theta$ や $r\sin\theta d\phi$ が長さの次元を持っている）。さらに、前回説明したように、拘束条件があると運動の自由度が減るので、 n 個の質点の座標を r_i （すなわち、 $x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n$ ）のように個別に区別しておく必要もなくなる。そこで、 n 個の質点の座標を q_i ($i=1, 3n$) のように表記して、これを一般化座標と呼ぶ。もし、拘束条件が ℓ 個あれば、一般化座標の数は、 $(3n-\ell)$ 個となり、 q_i ($i=1, 3n-\ell$) と表す。 $3n-\ell$ を新たに m と定義して、この質点系の自由度と呼ぶ。

（以下省略）

4. ラグランジュ方程式

ここでは、ダランベールの原理（(6)式）から、ラグランジュの運動方程式を導く。(6)式を実際に作用する力ベクトル F_i のなす仮想仕事と、慣性力 $-m_i \ddot{r}_i$ のなす仮想仕事に分けて、一般化座標を用いて書き直していく。まず、前者については、

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \delta q_j \quad (17)$$

ここで、 Q_j は一般化力と呼び、次式で定義される。

$$Q_j = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (18)$$

次に慣性力項であるが、符号のマイナスを外して式変形をすると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right\} \delta q_j \quad (19) \end{aligned}$$

となる。

（以下省略）