講義名　連続体力学　配付資料　OCW

# 第 7 回　応力テンソル（１）

無機材料工学科
准教授　安田公一

## １．応力ベクトル

第 5 回の講義(材料力学における応力ベクトル)では，断面積一定の棒状試験片を横切る仮想断面を考えたが，実際の物体では，いつも，断面積が一定であるとは限らない．また，表面力の作用する領域や，変位拘束の領域によっては，物体内に応力ベクトルに分布が生じる．このような場合にも使えるように，応力ベクトルを再定義する．

（中略）

面積素片の片方の面を表面とし，もう一つの面を裏面としよう．そうすると，表面に立てた単位法線を $\boldsymbol{n}$ とすれば，裏面に立てた単位法線は $-\boldsymbol{n}$ になる．表面に作用する力ベクトルを $\Delta\boldsymbol{P}$（$=|\Delta\boldsymbol{P}|\cdot\boldsymbol{m}$，$|\Delta\boldsymbol{P}|$は力ベクトル $\Delta\boldsymbol{P}$ の大きさ，$\boldsymbol{m}$ は力ベクトル方向の単位ベクトル，一般には，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ は異なる）とすれば， 裏面に作用する力ベクトルは 逆向きのベクトルなので　$-\Delta\boldsymbol{P}$（$=|\Delta\boldsymbol{P}|\cdot-\boldsymbol{m}$）となり，両者の和は 0 ベクトルとなって釣り合いの条件を満たす．この時，表面の応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^n$ を

$$\boldsymbol{\sigma}^n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dS} \qquad (1)$$

で定義する．すなわち，物体中の任意の点 $x$ において，適当な面を指定すれば，その面に作用する応力ベクトルを定義することができ，物体内に応力分布があっても考察の対象とすることができる．　このように定義すれば，裏面に作用する応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^{-n}$ は,

$$\boldsymbol{\sigma}^{-n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{-\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} = -\frac{d\boldsymbol{P}}{dS} = -\boldsymbol{\sigma}^n \qquad (2)$$

となって，

$$\boldsymbol{\sigma}^n + \boldsymbol{\sigma}^{-n} = \boldsymbol{\sigma}^n + (-\boldsymbol{\sigma}^n) = \boldsymbol{0} \qquad (3)$$

自動的に釣り合いの条件も満足する．また，繰り返しになるが，図 2 に示すように，一般には，応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^{n}$ の方向($\boldsymbol{m}$ ベクトルの方向)と面法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向は一致しないので注意すること．

（以下省略）

## ２．応力テンソル

図３に示すように，表面力(面を介して作用する力)$F_i$ や体積力(重力や遠心力のように単位体積あたりで負荷される力)$W_j$ が作用することにより，内部応力状態にある物体 V を仮定する．物体内の任意の点 P を参照し，図４に示したような無限小 4 面体を

作る．面 ABC(面積 dS)に作用する応力ベクトルを$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}$とし，$x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸に垂直な面 PBC(面積 $dS_x(=\nu_x \cdot dS)$)，PCA(面積 $dS_y(=\nu_y \cdot dS)$)，PAB(面積 $dS_z(=\nu_z \cdot dS)$)に作用する応力ベクトルを$\boldsymbol{\sigma}^{-x}$, $\boldsymbol{\sigma}^{-y}$, $\boldsymbol{\sigma}^{-z}$とすると（面法線が座標軸の負の方向を向いているので，これらを裏面の応力ベクトルとした），無限小 4 面体の力のつりあいから，次式が得られる．

$$\boldsymbol{\sigma}^n dS + \boldsymbol{\sigma}^{-x} dS_x + \boldsymbol{\sigma}^{-y} dS_y + \boldsymbol{\sigma}^{-z} dS_z + f dV = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{\sigma}^n dS - \boldsymbol{\sigma}^x dS_x - \boldsymbol{\sigma}^y dS_y - \boldsymbol{\sigma}^z dS_z + f dV = 0 \qquad (6)$$

ここで，$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{z}}$ は微小 4 面体の正の面に作用する応力ベクトル，$\boldsymbol{f}$ は体積力，$\mathrm{d}V$ は微小 4 面体の体積である．微小 4 面体を限りなく小さくしていくと，$\mathrm{d}V$ は $\mathrm{d}S$ に,比べて高位の微小量となるので，(6)式を書き換えると次式が得られる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}} &= \frac{S_x}{S}\boldsymbol{\sigma}^x + \frac{S_y}{S}\boldsymbol{\sigma}^y + \frac{S_z}{S}\boldsymbol{\sigma}^z \\ &= \nu_{\mathrm{nx}}\boldsymbol{\sigma}^x + \nu_{ny}\boldsymbol{\sigma}^y + \nu_{nz}\boldsymbol{\sigma}^z \qquad (7)\end{aligned}$$

ここで，$\upsilon_{\mathrm{nx}}, \upsilon_{\mathrm{ny}}, \upsilon_{\mathrm{nz}}$ 面 ABC の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向余弦である．

次に，応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{x}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{y}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{z}}$ は，$x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸に沿った基底ベクトル **i**, **j**, **k** を用いると，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{i}\sigma_{xx} + \boldsymbol{j}\sigma_{xy} + \boldsymbol{k}\sigma_{xz} \\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{y}} &= \boldsymbol{i}\sigma_{yx} + \boldsymbol{j}\sigma_{yy} + \boldsymbol{k}\sigma_{yz} \qquad (8) \\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{z}} &= \boldsymbol{i}\sigma_{zx} + \boldsymbol{j}\sigma_{zy} + \boldsymbol{k}\sigma_{zz}\end{aligned}$$

式 (8) を式(7)に代入すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{i}(\nu_{nx}\sigma_{xx} + \nu_{ny}\sigma_{yx} + \nu_{nz}\sigma_{zx}) \\ &+ \boldsymbol{j}(\nu_{nx}\sigma_{xy} + \nu_{ny}\sigma_{yy} + \nu_{nz}\sigma_{zy}) \qquad (9) \\ &+ \boldsymbol{k}(\nu_{nx}\sigma_{xz} + \nu_{ny}\sigma_{yz} + \nu_{nz}\sigma_{zz})\end{aligned}$$

この式より，物体内の任意の点 P で適当な面 dS（面法線 $\boldsymbol{n}$）を指定すれば，そこでの応力ベクトル$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{n}}$ は 9 個の応力テンソルの成分$\sigma_{\mathrm{ij}}$ $(\mathrm{i,j} = x,y,z)$から代数的に計算することができるのがわかる．なお，いくつかの本では，同じ表現を，次のマトリックス表示で示している．

$$\left(\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \sigma_z\right) = \left(\nu_x, \quad \nu_y, \quad \nu_z\right)\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix} \qquad (10)$$

ここで，$\sigma_{\mathrm{i}}$ は応力ベクトル$\sigma^{\mathrm{n}}$ の成分，$\sigma_{\mathrm{ij}}$ は応力テンソルの成分，$\upsilon_{\mathrm{j}}$ は面法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の成分である．

（以下省略）