

問 1

(1) : 下記の差分不等式系の解の有無を判定するために、最短路問題に帰着して計算したい.

$$x_b - x_a \leq -1, x_a - x_b \leq 3, x_c - x_a \leq 1, x_b - x_c \leq 2, \\ x_c - x_d \leq 3, x_d - x_a \leq 4, x_d - x_b \leq -4$$

この不等式系に対応する有向グラフを書け. 各枝にはその長さも書くこと.

(解の有無を判定する必要はない)

コメント : ほとんどの学生ができていました.

(2) : 有向グラフ (V, E) および各枝 (u, v) の長さ $\ell(u, v)$ が与えられているとする. このグラフにはポテンシャル $p(v)$ ($v \in V$) が存在すると仮定する.

(2-1) $p(v)$ ($v \in V$) がポテンシャルであることの定義を書け.

(2-2) この有向グラフに頂点 s から頂点 t への路が存在するとする. このとき, 頂点 s から頂点 t への任意の路の長さが $p(t) - p(s)$ **以上**になることを証明せよ.

コメント : (2-1) は殆どの学生が出来ていた. 「任意の枝に対して」もしくは「すべての枝に対して」と書くのを忘れずに.

(2-2) は板書で証明した命題です. 証明ですが, ポテンシャル存在時に負閉路がないことを証明するやり方と同じです.

(3) : 有向グラフ $G = (V, E)$ および各枝 (u, v) の長さ $\ell(u, v)$ が与えられており, $s \in V$ とする. 各頂点 v および非負整数 k に対して,

$d_k(v)$ = 頂点 s から頂点 v への枝数が k 以下の路の中で, 最短なもの長さ,

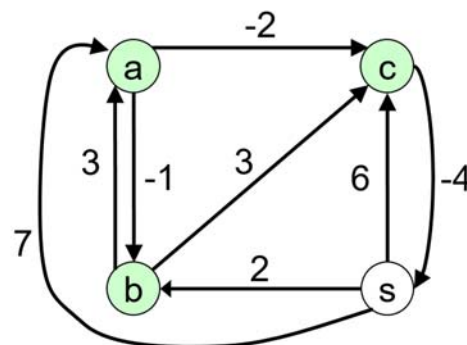
ただし, そのような路が存在しない場合は $d_k(v) = +\infty$

と定義する. このとき, $k \geq 1$ に対して以下の関係が成り立つことを証明せよ.

$$d_k(v) = d_{k-1}(v), \quad \text{またはある枝 } (u, v) \text{ が存在して } d_k(v) = d_{k-1}(u) + \ell(u, v).$$

コメント : $d_k(v)$ に対応する s から v への路として, 枝数がちょうど k の場合と $k-1$ 以下の場合が存在することを理解していれば簡単. 分かっている学生は少なかったです.

(4) : 右の図で表された有向グラフに対して, 頂点 s から各頂点 v への最短路が存在するか否かを判定したい. このグラフに対して, ベルマン・フォードのアルゴリズムを実行せよ. また, **その計算結果をふまえて**, この有向グラフに**頂点 s からすべての頂点 v への最短路が存在するか否かを判定せよ.**

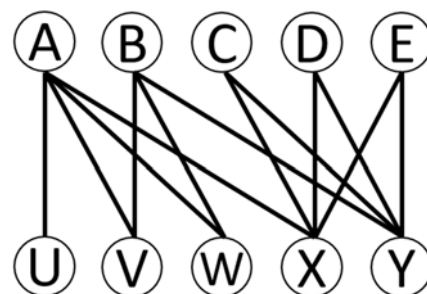


コメント : 数値の計算自体はほとんどの学生が出来ていました. $k=0, 1, 2, 3, 4$ について計算する必要があります. $k=3$ の結果と $k=4$ の結果を比較するのがポイント. ここで負閉路の有無を判断するのですが, 出来ていない学生が多かった.

問 2

(1) : グラフにおけるマッチングの定義と頂点被覆の定義を書け.

コメント : ほとんどの学生が出来ていました.



(2) : 右の二部グラフについて考える. 以下の問いに答えよ.

(2-1) このグラフの最大マッチングを, 増加路を用いたアルゴリズムにより求めよ. ただし, **マッチング** $\{(A, X), (C, Y)\}$ を初期解とすること. また, **各反復で利用した増加路と各反復のマッチング**を分かるように書くこと.

(2-2) このグラフの**最小頂点被覆**を求めよ. 結果のみ書けば良い.

コメント : ほとんどの学生が出来ていました. 簡単だったようです.

(3) : あるグラフにおけるマッチングを $M = \{(u_i, v_i) | i = 1, 2, \dots, k\}$, 頂点被覆を $S = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ とする.
マッチングと頂点被覆の定義をふまえて, 以下を証明せよ.

(3-1) マッチングの各枝 (u_i, v_i) に対し, 頂点被覆 S の中のある頂点 r_j が存在して,
 $u_i = r_j$ または $v_i = r_j$ が成り立つことを証明せよ.

(3-2) マッチング M のある枝 (u_i, v_i) が頂点被覆 S の中のある頂点 r_j に接続しているとき,
 (u_i, v_i) 以外のすべてのマッチング M の枝は頂点 r_j に接続しないことを証明せよ.

コメント : 授業中に詳しく説明した証明ですが, 多くの学生が出来ていました.

(4) : 次のような二部グラフを考える. 頂点集合は $\{a, b, c\}$ と $\{x, y, z\}$ に分かれ

ており, a, b, c の各頂点から x, y, z の各頂点への枝が存在する. 各枝の重みは右の表の通りである.

(4-1) このグラフの最大重み k マッチングを, $k=1, 2, 3$ の場合について求めよ. 結果のみ書けばよい.

(4-2) マッチング $\{(a, y)\}$ に関する重み最大の増加路を求めよ. 結果のみ書けばよい.

	a	b	c
x	-6	1	-8
y	4	5	3
z	-4	3	-6

※ **定義** : グラフの枝 (u, v) および頂点 r に対し, $r = u$ または $r = v$ が成り立つとき,
枝 (u, v) は頂点 r に接続するという.

コメント : (1) はほとんどの学生が出来ていました.

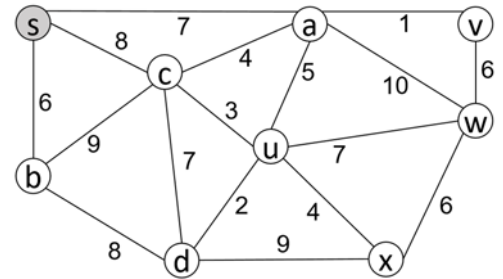
(2) は間違っている学生が多かったです. 増加路の定義をあらためて確認してください.

問 3

(1) : 枝集合 T がグラフ $G = (V, E)$ の全域木であることの定義を書け.

コメント : ほとんどの学生ができていました.

(2) : 右のグラフの最小全域木を, **クラスカル**のアルゴリズムおよび**プリム**のアルゴリズムを用いて計算せよ. **解答用紙のグラフにおいて, 最小全域木の枝を太線で記入すると共に, 最小全域木の各枝に対して追加された順番**を書くこと. プリムのアルゴリズムでは, **頂点 s を根とすること**.



コメント : プリムのアルゴリズムはほとんどの学生が理解できているのに対し, クラスカルアルゴリズムは良く分かっていない学生が意外に多かったです.

(3) : グラフ $G = (V, E)$ の枝集合 $T \subseteq E$ に対し, 以下の 5 条件は等価であることが知られている.

- (a) T は全域木,
- (b) グラフ (V, T) の任意の 2 頂点の間に路はただ 1 つ存在,
- (c) グラフ (V, T) は連結, ただし T から任意の枝を削除すると非連結,
- (d) $|T| = |V| - 1$, かつグラフ (V, T) は連結,
- (e) $|T| = |V| - 1$, かつ T は閉路を含まない.

この事実をふまえ, 以下の問いに答えよ. ただし, 証明において上記の 5 条件の等価性を使うときは, どの条件を使ったか明記すること (例: 「(a) と (b) が等価であるので, XXX が成り立つ」)

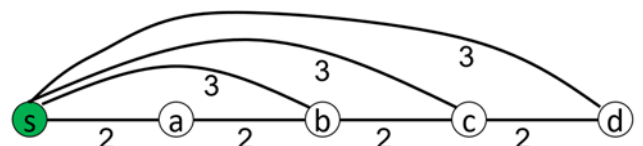
- (3-1) 全域木 T に対し, T に含まれない枝 (u, v) を追加すると, その枝集合は閉路をただ 1 つもつ. このことを証明せよ.
- (3-2) 問 (3-1) で得られた閉路を C とおく. C に含まれる任意の枝 (s, t) に対し, 枝集合 $T \cup \{(u, v)\}$ から枝 (s, t) を削除して得られる枝集合を T' とおく. この枝集合 T' が閉路を含まないことを証明せよ.
- (3-3) 問 (3-2) で得られた枝集合 T' が全域木であることを証明せよ.

コメント : 思っていたより正解率は高かったですが, 完璧に証明できている学生はごくわずか.

- (1) については, 閉路が「ただ」1 つ出来ることをきちんと説明する必要があります.
- (2) は比較的簡単.
- (3) はどこで 5 条件の等価性を使っているか, きちんと指摘すること.

(4) : 右のグラフにおける最小全域木ゲームを考える.

ここで s はソース, a, b, c, d はプレイヤーを表す.



- (4-1) この最小全域木ゲームにおける Bird 分担および対応する全域木を 1 つ求めよ.
結果のみ書けば良い.
- (4-2) この最小全域木ゲームにおいて, 各プレイヤー a, b, c, d の費用分担 (支払額) を非負変数 p_a, p_b, p_c, p_d によってそれぞれ表すとする. (p_a, p_b, p_c, p_d) がコアに含まれるための

必要十分条件を等式，不等式を用いて**具体的に**書け．結果のみ書けば良い．

(4-3) この最小全域木ゲームにおいて，Bird 分担以外の費用分担がコアに存在するかどうか，

答えよ．存在する場合は，そのような費用分担を書け．存在しない場合は，そのことを証明せよ．

コメント：(1)(3) は多くの学生が出来ていました．

(2) については，条件式が 15 個必要です．