

数理経済学 第4回 最大重みマッチング問題

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

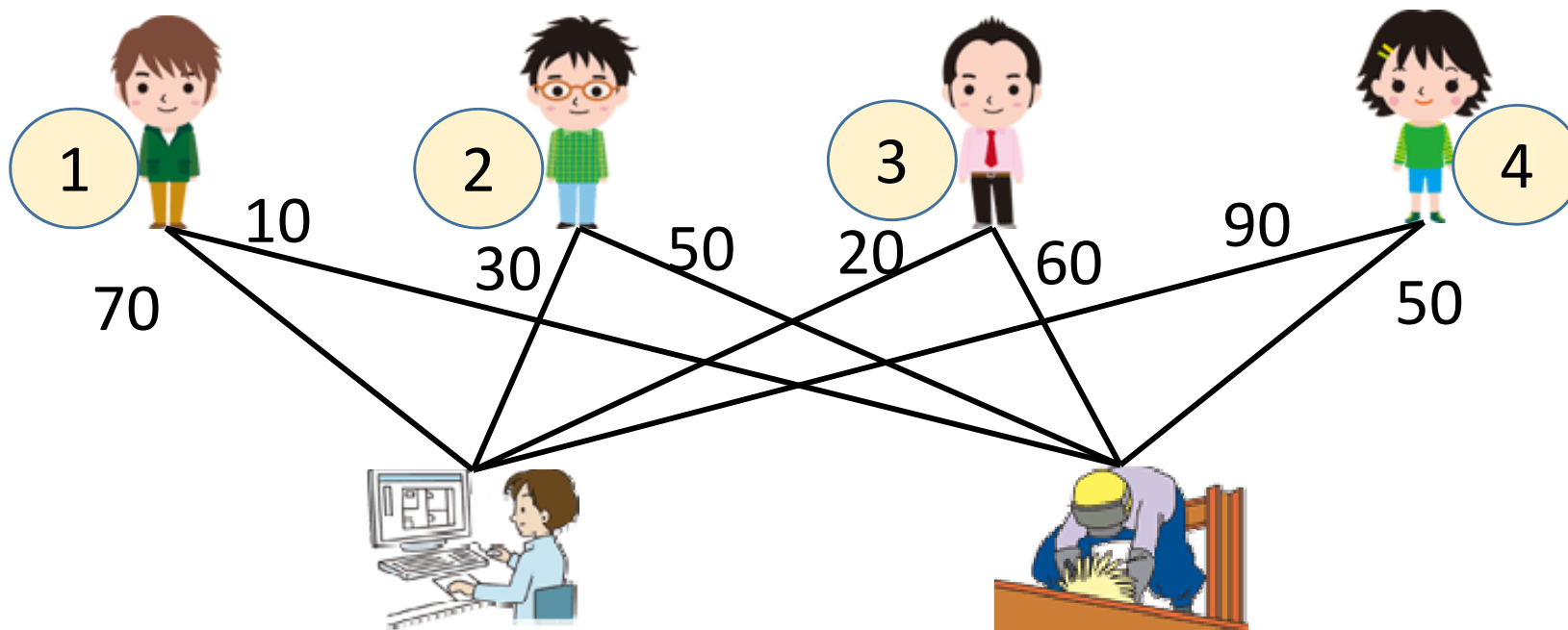
今後の予定

- 6／26, 6／29: 最小全域木問題
 - 中間試験の範囲はここまで
- 7／3: 休講
- 7／6: 中間試験

最大重みマッチング問題の 定義と例

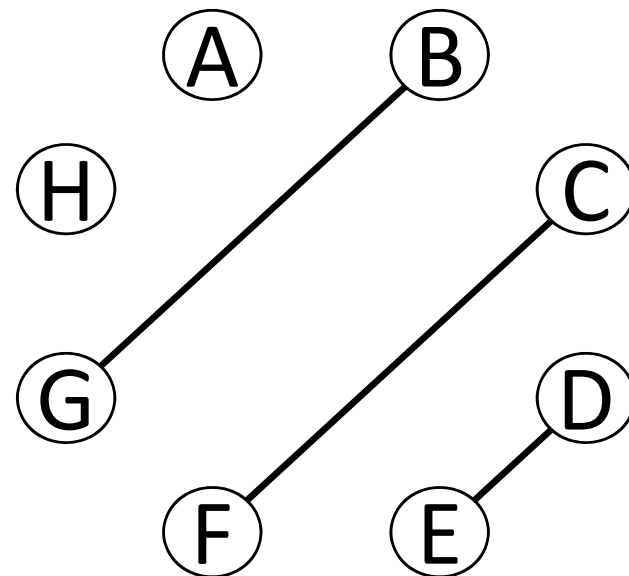
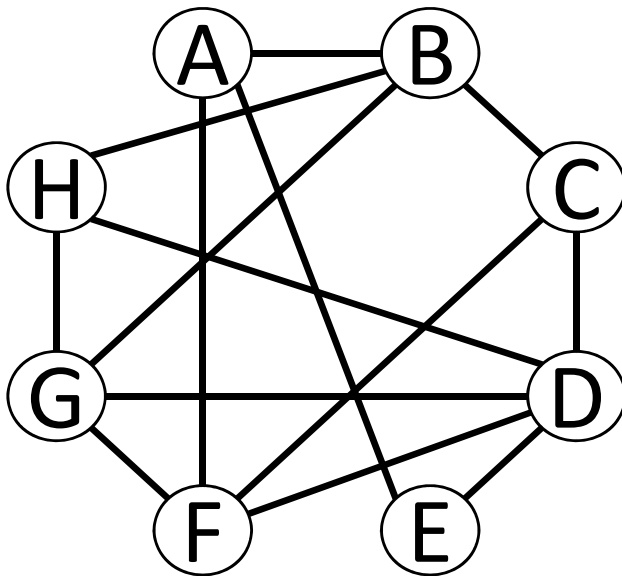
最大重みマッチング問題

- 労働者に仕事を割り当てたい
 - 各労働者には, 高々1つの仕事が割り当て可能
 - 各仕事は, 高々一人の労働者に割り当て可能
 - 労働者を仕事に割り当てると, 利益が得られる
- 総利益を最大にする割り当てを見つけたい → 最大重みマッチング



一般グラフの最大重みマッチング問題

- 一般のグラフでも、最大重みマッチング問題を考えることができる
 - 例: 2人チーム(ペア)で作業を行う
 - 相性の良いチームを多く作りたい
 - 相性を数値化, 相性の合計値を最大にするチームを求めたい



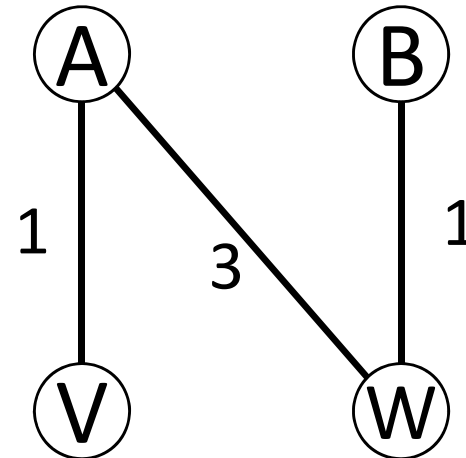
最大重みマッチング問題の定義

最大重みマッチング問題

- **入力:** グラフ $G=(V,E)$ (頂点集合 V , 枝集合 E),
各枝 (u,v) の重み $w(u,v)$
- **出力:** 枝重みの和が最大のマッチング (最大重みマッチング)

※「最大重みマッチング→最大サイズマッチング」は
一般に成り立たない

例: 最大重みマッチングは
 $\{(A,W)\}$, 重み3
最大サイズマッチングは
 $\{(A,V), (B,W)\}$, 重み2



最大重みkマッチング問題の定義

最大重みkマッチング問題

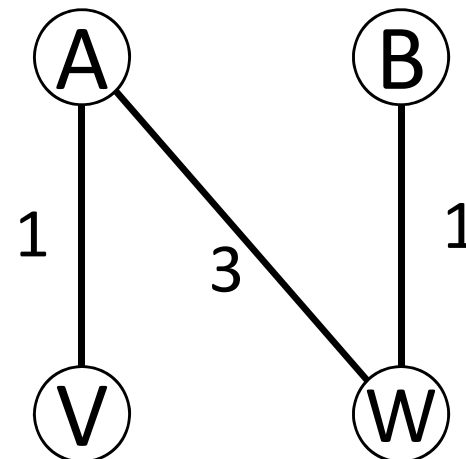
- **入力:** グラフ $G=(V,E)$ (頂点集合 V , 枝集合 E),
各枝 (u,v) の重み $w(u,v)$
正整数 k
- **出力:** 枝数= k のマッチングの中で枝重みの和が最大のもの
(最大重みkマッチング)

例: 最大重み1マッチングは

$\{(A,W)\}$, 重み3

最大重み2マッチングは

$\{(A,V), (B,W)\}$, 重み2



最大重みマッチング問題の例1： 研究室配属問題

各研究室に学生数人を割り当てる

学生A,B,C,Dの4人を研究室X,Yへ

各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	2	2

学生の満足度の合計を最大にしたい

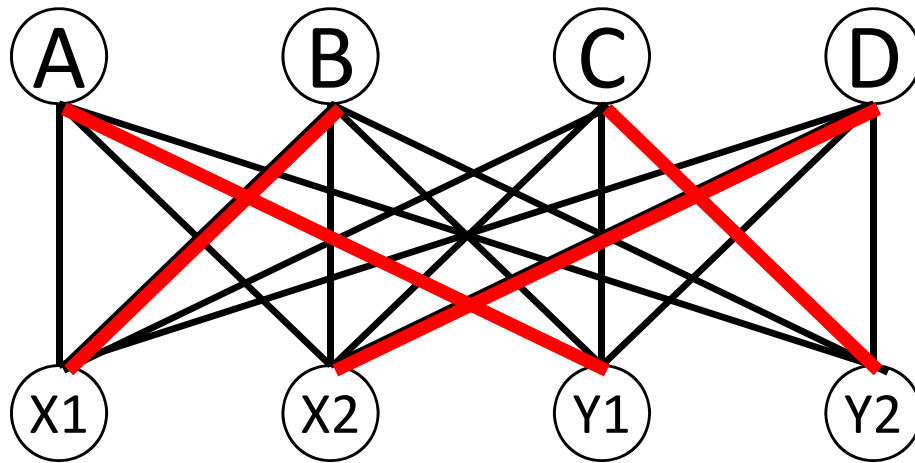
満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

研究室配属問題から 最大重みkマッチング問題へ

各学生に対応する頂点, 各研究室の「枠」に対応する頂点

各学生と「研究室枠」の間に枝, 重み＝満足度

k ＝学生数



$w(u,v)$	A	B	C	D
X1	6	8	5	9
X2	6	8	5	9
Y1	9	1	5	3
Y2	9	1	5	3

最大 k マッチング → 研究室配属案

※注意: この配属決定法では,
学生が嘘をつくことで得する可能性がある.

最大重みマッチングと交互路

(復習) 交互路・交互閉路

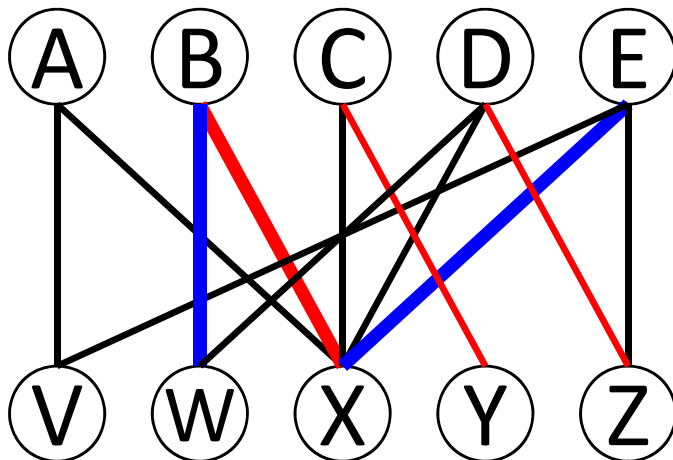
定義: マッチング M に関する **交互路**

- (i) M の枝と M 以外の枝が交互に現れる路
- (ii) 路の最初の枝が M 以外 $\rightarrow$ 路の始点は, M の枝の端点ではない
- (iii) 路の最後の枝が M 以外 $\rightarrow$ 路の終点は, M の枝の端点ではない

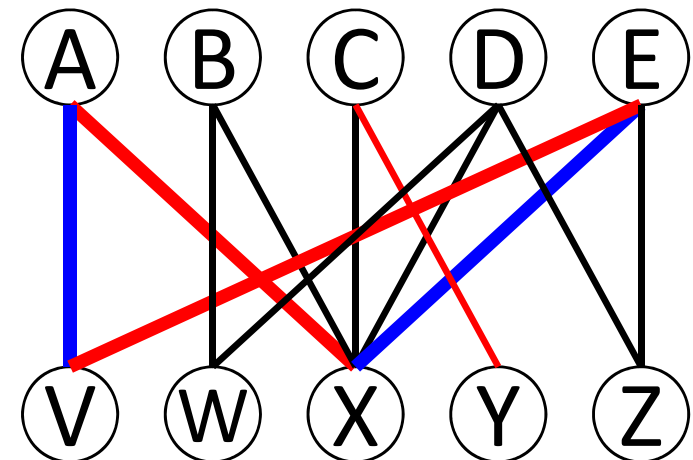
定義: マッチング M に関する **交互閉路**

= M の枝と M 以外の枝が交互に現れる閉路

交互路の例

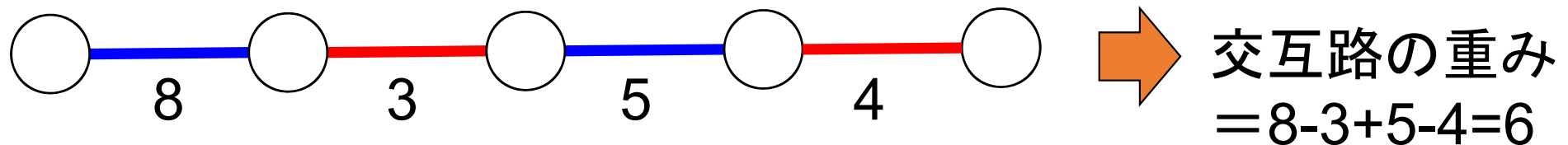


交互閉路の例



交互路・交互閉路による マッチングの更新

定義: マッチング M に関する交互路 (交互閉路) P の **重み**
 $= P \setminus M$ の枝重みの和 $- P \cap M$ の枝重みの和



命題 マッチング M に対し, P は (M に関する) 交互路または交互閉路
 $\rightarrow P$ を使って M の枝を入れ替えると, 新しいマッチング M' ができる

$$M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$$

重みの変化量: M' の重み $- M$ の重み $= P$ の重み



命題 正の重みの交互路 (交互閉路) が存在
 $\rightarrow$ 現在のマッチング M は最大重みではない
 (対偶: マッチング M は最大重みマッチング
 $\rightarrow$ 正の重みの交互路 (交互閉路) は存在しない)

交互路によるマッチングの最適性条件

最大重みマッチングではない $\rightarrow$ 正の重みの交互路(閉路)が必ず存在

命題 正の重みの交互路(交互閉路)が存在

← 現在のマッチング M は最大重みではない

(対偶: マッチング M は最大重みマッチング

← 正の重みの交互路(交互閉路)は存在しない)

(証明) 最大重みマッチングを M^* とおく

枝集合 $(M^* \setminus M) \cup (M \setminus M^*)$ に注目

$\rightarrow$ 幾つかの (M に関する)

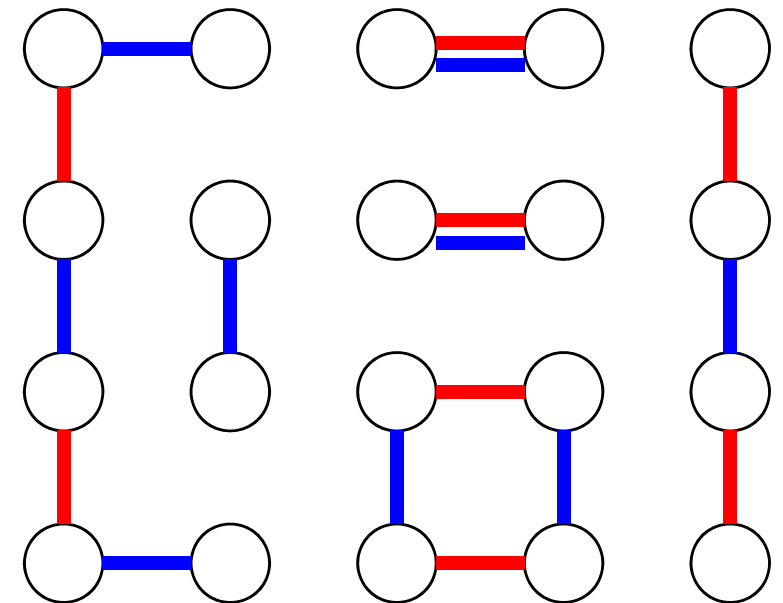
交互路・交互閉路からなる.

それらの重みの合計

$= M^* \setminus M$ の重み $- M \setminus M^*$ の重み

$= M^*$ の重み $- M$ の重み > 0

$\therefore$ 正の重みの交互路または交互閉路が必ずひとは存在



最大重みマッチングの計算

最大重みマッチング問題のアルゴリズム

「 M は最大重みマッチング $\leftrightarrow$ 正の重みの交互路(閉路)がない」

これに基づき、次のアルゴリズムが得られる

アルゴリズムA

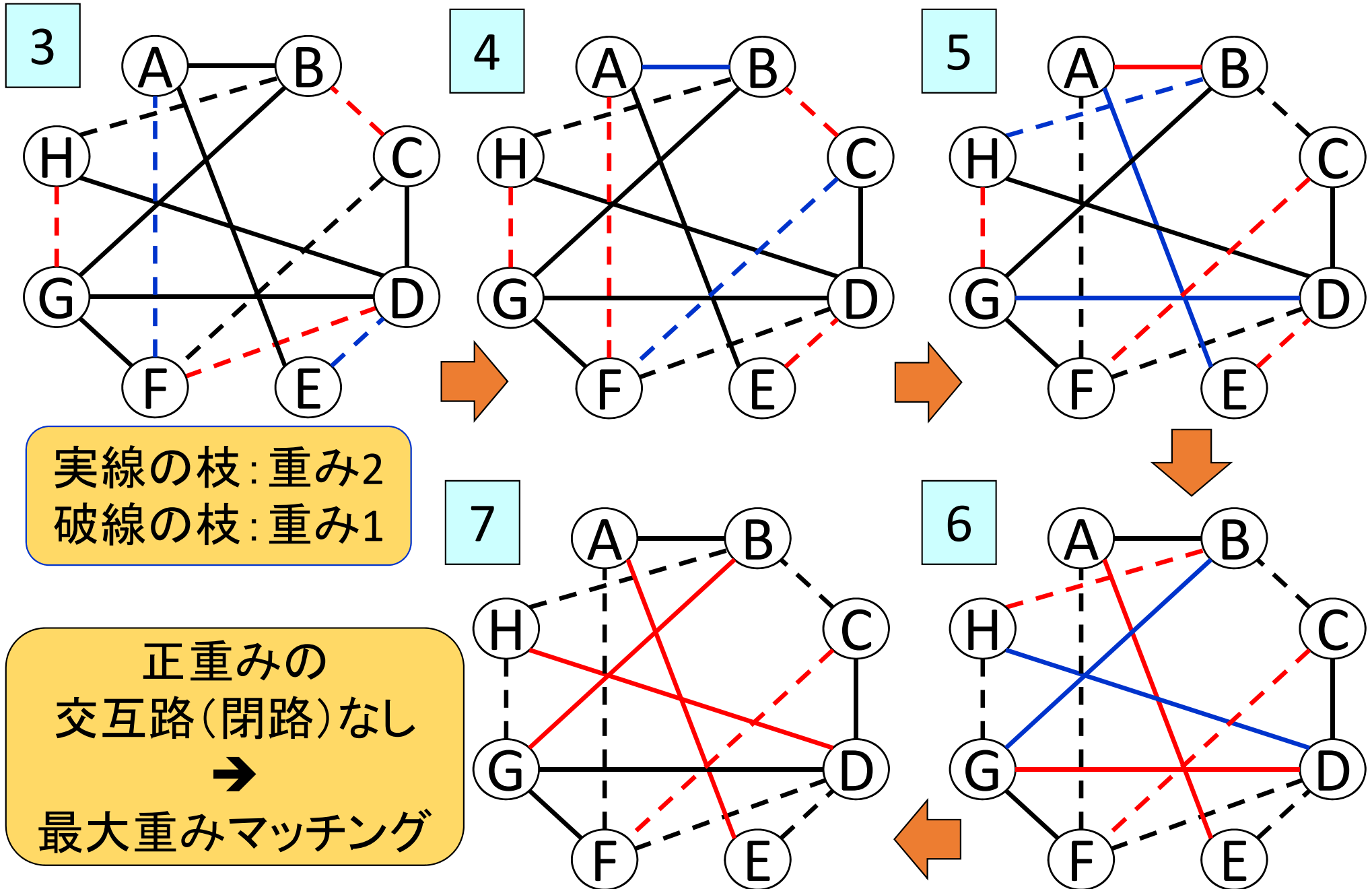
ステップ0: 初期マッチング M を任意に選ぶ(例えば $M := \emptyset$)

ステップ1: M に関する正の重みの交互路(閉路)の存在をチェック.
存在しない $\rightarrow$ 現在の M は最大重みマッチング(終了)
存在する $\rightarrow$ ステップ2へ.

ステップ2: M に関する正の重みの交互路(閉路) P をひとつ見つけ,
 P を用いて M を更新 ($M := (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$)
ステップ1へ.

反復回数が増える可能性あり

アルゴリズムの実行例



最大重み増加路を用いたアルゴリズム

- 各 $k=0,1,2,\dots$ に対する最大重み k マッチングを求める
- 各反復で, 重み最大の増加路を利用
- 高々 $|V|/2$ 回の反復で終了

アルゴリズムB

ステップ0: $M_0 := \emptyset$, $k=0$ とする.

ステップ1: M_k に関する増加路が存在しない $\rightarrow$ 終了

ステップ2: M_k に関する最大重みの増加路 P をひとつ見つけ,
 P を用いて M_k を更新 ($M_{k+1} := (M_k \setminus P) \cup (P \setminus M_k)$)
 $k:=k+1$ においてステップ1へ.

命題 各 $k=0,1,\dots$ に対し, M_k は最大重み k マッチング

アルゴリズムの正当性

命題 各 $k=0,1,\dots$ に対し, M_k は最大重み k マッチング

(証明の概略)

ある k に対し, M_k は最大重み k マッチングとする.

このとき, ある最大重み $k+1$ マッチング M^* で,

$(M^* \setminus M_k) \cup (M_k \setminus M^*)$ が(一つの)増加路となるようなものが
存在することを示せば良い.

M^* として, $|M^* \cap M_k|$ 最大の最大重み $k+1$ マッチングを選ぶ

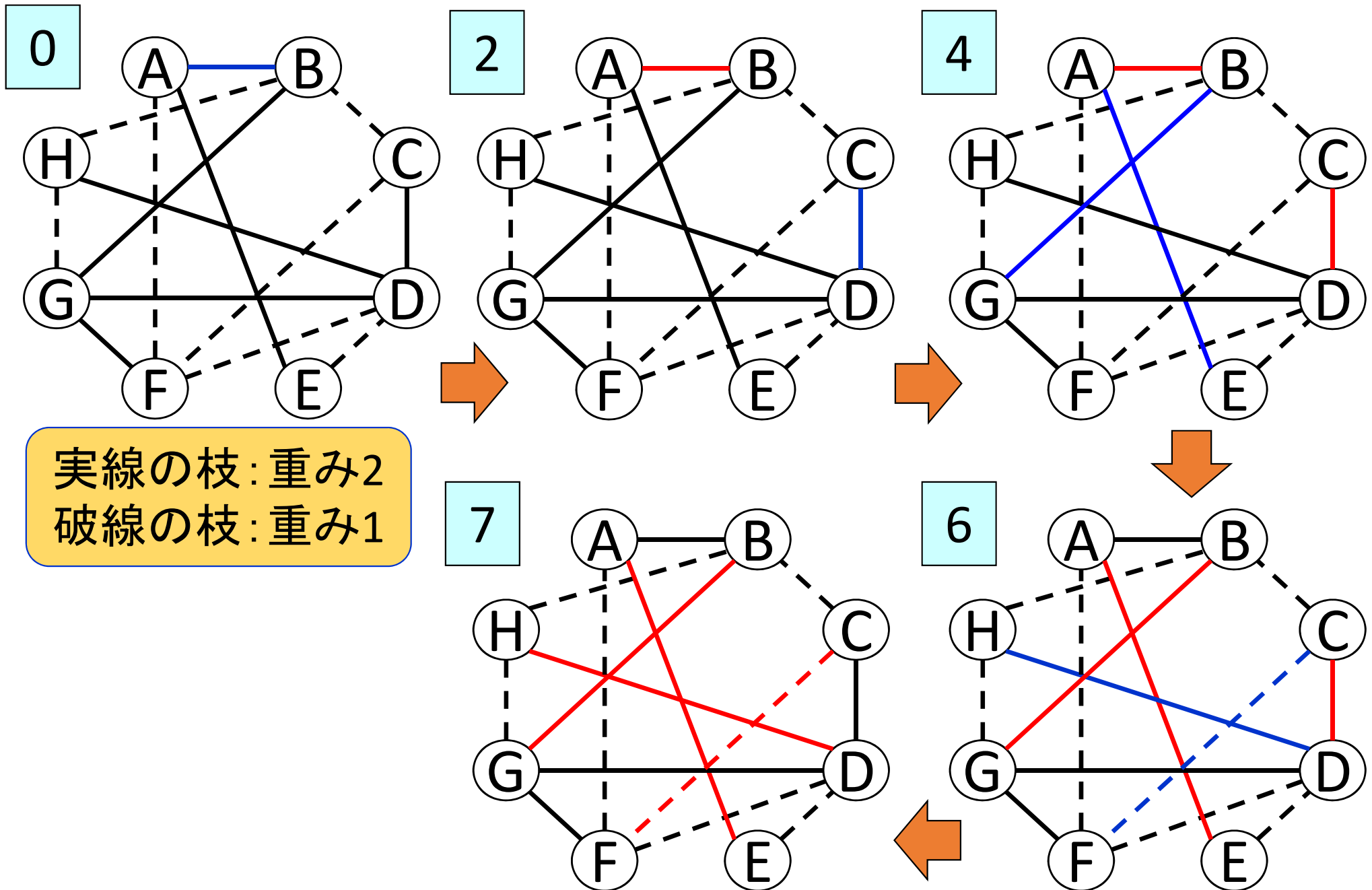
→ $(M^* \setminus M_k) \cup (M_k \setminus M^*)$ は交互路・交互閉路の集まり

(注意: M^* の方が枝数が多いので, 増加路が必ず存在)

交互路・交互閉路が2つ以上存在する

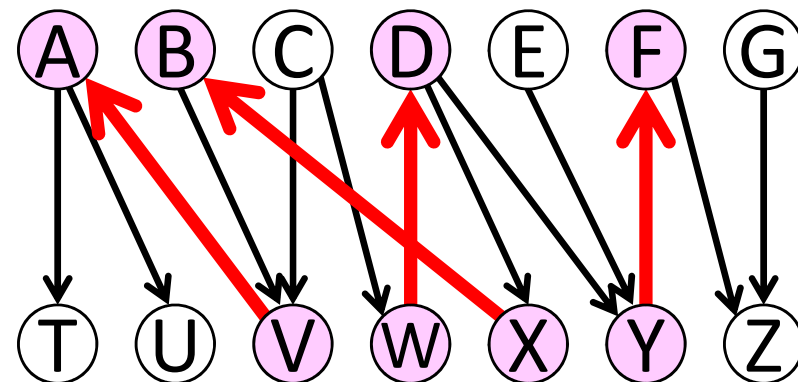
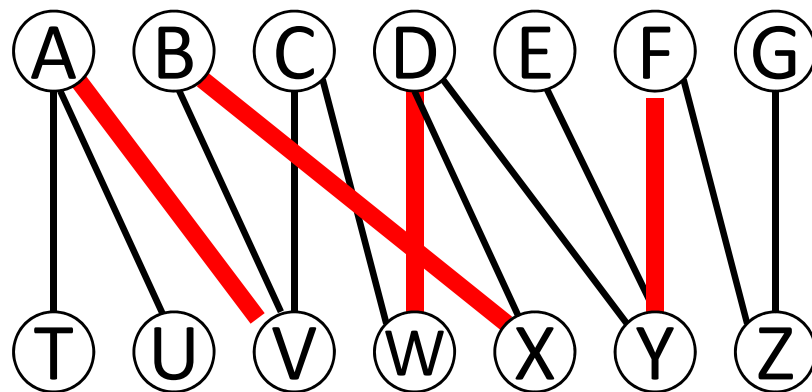
→ $|M^* \cap M_k|$ 最大に矛盾することが示せる(なぜ?)

アルゴリズムの実行例



重み最大の増加路の探し方: 二部グラフの場合

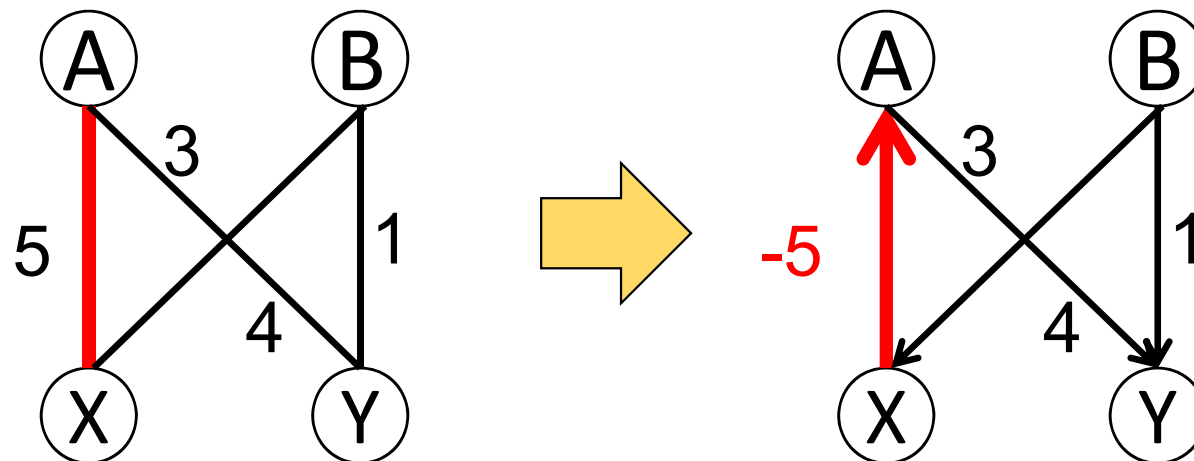
- 増加路を求める場合と同様に計算可能.
- 二部グラフの頂点集合が V_1, V_2 に分かれているとき,
 - マッチング M の枝は, V_2 の頂点から V_1 の頂点に向き付け
 - それ以外の枝は, V_1 の頂点から V_2 の頂点に向き付け
- V_1 の頂点のうち,
 - マッチングの枝が接続している頂点の集合 $\rightarrow U_1$
 - 残りの頂点の集合 $\rightarrow T_1$
- U_2, T_2 も同様に定義



ピンクの頂点: U_1 と U_2
 白い頂点: T_1 と T_2

増加路の見つけ方：二部グラフの場合

- 各有向枝の長さ：
 - マッチングの枝の逆向き枝の長さ＝元の長さ $\times (-1)$
 - それ以外の枝の長さ＝元の長さ
- 新しい有向グラフにおける T_1 の頂点から T_2 の頂点への有向路
 $\leftrightarrow$ 元の二部グラフの (Mに関する) 増加路
- ∴ 有向グラフにおいて, T_1 の頂点から T_2 の頂点への有向路のうち,
 最も短いものを求めればよい



最大重みマッチング問題の例2: 複数財オークション

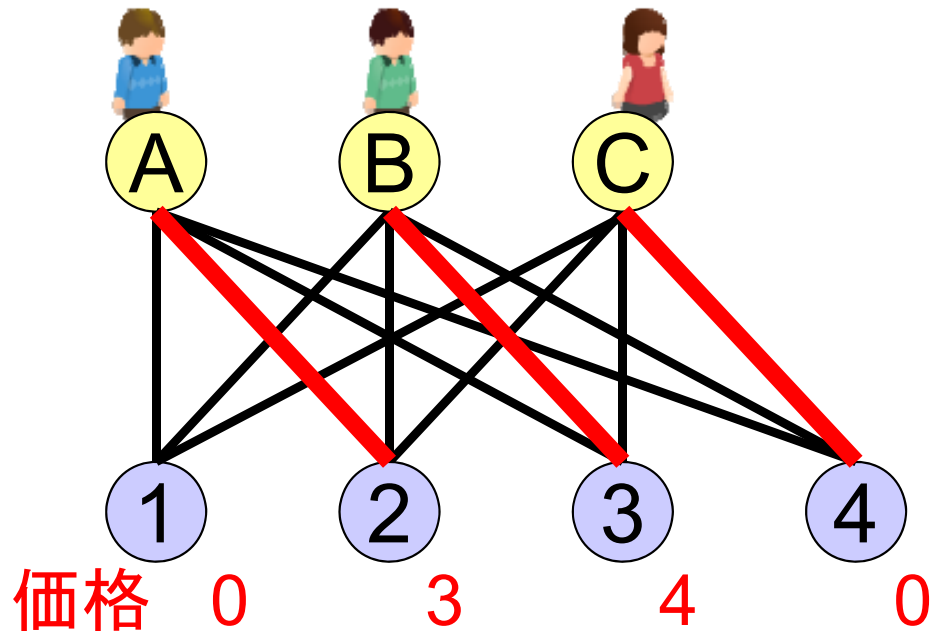
- m 個の財(品物) $\{1, 2, \dots, m\}$ を同時にオークションにかける
 - 各財は高々一人の参加者に割当て. 財が売れ残っても可
 - 各参加者 $i=1, 2, \dots, n$ は高々1つの財を取得
- 各参加者 i は, 欲しい財 j とその評価価格 $w(i, j)$ のリストを提示
- オークション主催者は, 各財の「適切な」価格 $p(j)$ を求める

オークションの目的: 以下の条件を満たす価格と財の割当

- 参加者 i に財 j が割り当てられる $\rightarrow$ 利得 $w(i, j) - p(j)$ 最大
($\max_{1 \leq j \leq n} \{w(i, j) - p(j)\} \geq 0$ のとき)
- $\max_{1 \leq j \leq n} \{w(i, j) - p(j)\} < 0$ のとき, 参加者 i に財を割り当てない
- 売れ残りの財の価格は 0

均衡価格, 均衡割当

複数財オークションの例



- 各参加者の利得は最大
- 財1は売れ残り → 価格0

$w(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

利得	A	B	C
①	3	1	0
②	4	3	4
③	-3	3	4
④	0	0	4

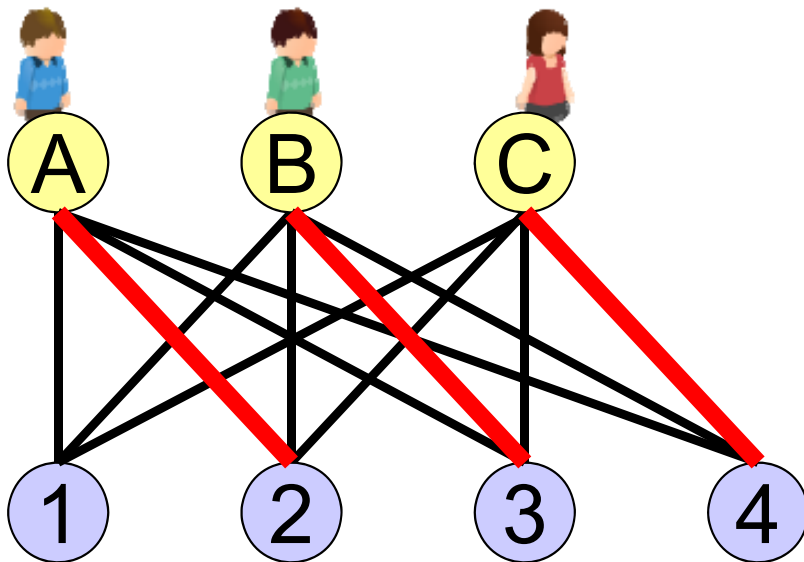
複数財オークションと 最大重みマッチングの関係

最大重みマッチング問題を解くと、均衡割当が得られる

定理

参加者と財の間のマッチング M は均衡割当

$\leftrightarrow M$ は重み $= w(i,j)$ としたときの最大重みマッチング

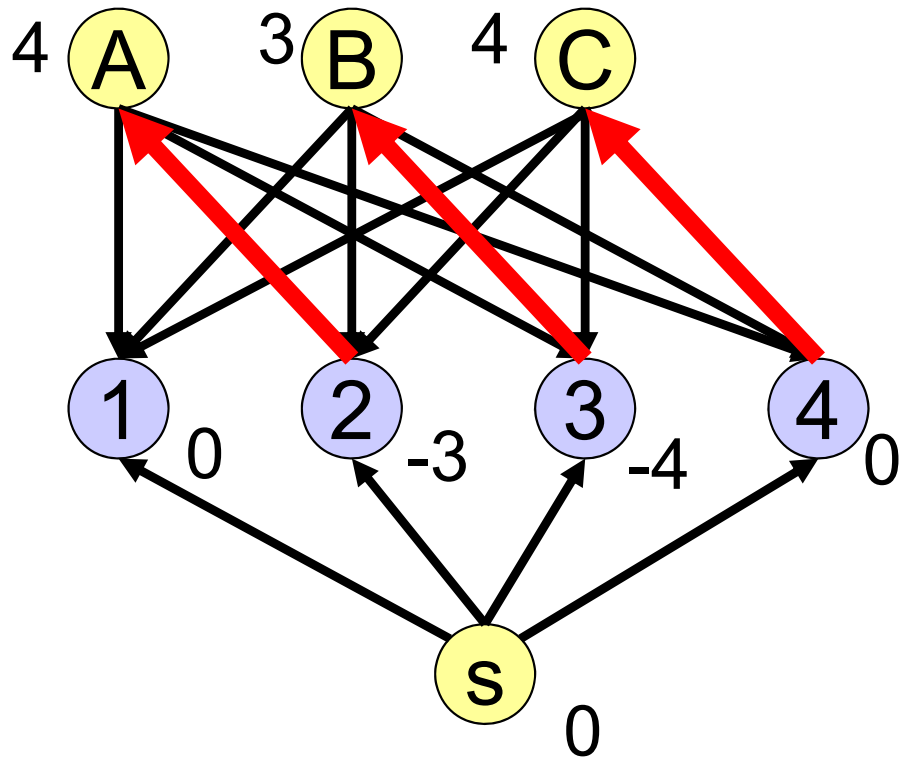


$w(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

均衡価格の計算

均衡価格は最短路問題を解いて求めることができる

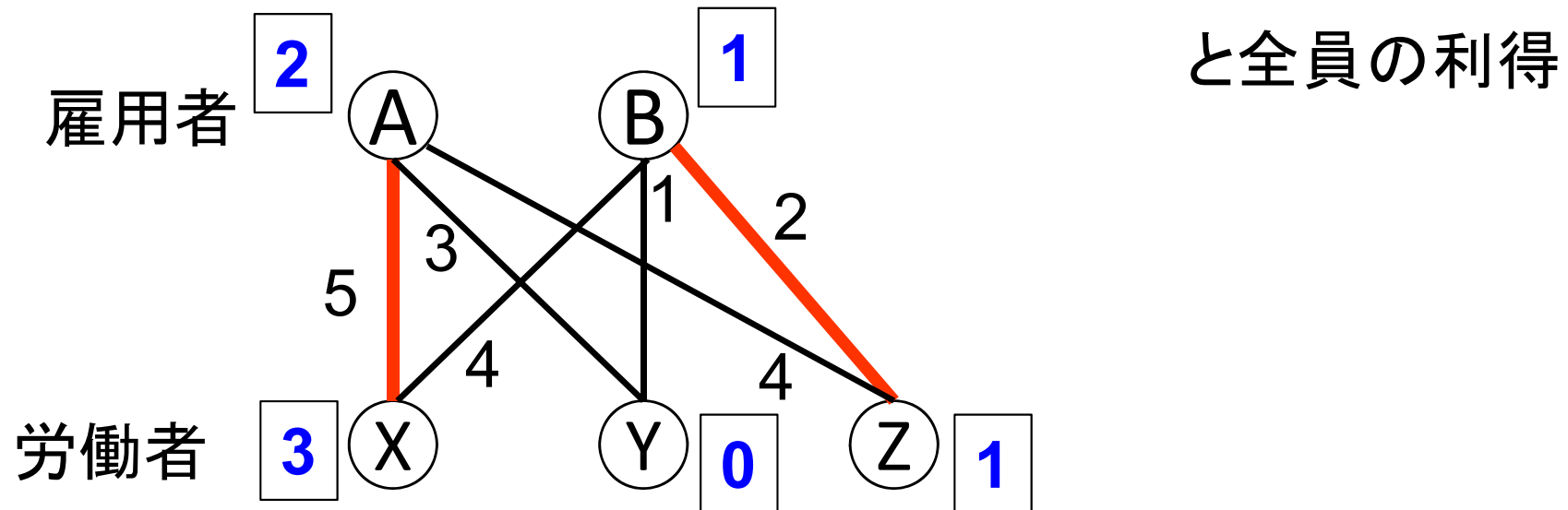
- 最大重みマッチングの枝: 財 $\rightarrow$ 参加者に向き付け. 長さ=重み
- その他の枝: 参加者 $\rightarrow$ 財に向き付け. 長さ=-重み
- 新しい頂点 s , および s から各財への長さ0の枝をつける.
- 財 j の価格 = $-(\text{頂点 } j \text{ への最短距離}) \rightarrow$ 均衡価格



$w(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

最大重みマッチング問題の例3: 割当ゲーム

- m 人の雇用者(仕事)と n 人の労働者
雇用者 i と労働者 j のペアに対する利益 $w(i,j) > 0$
- 雇用者 i が労働者 j を雇う(ペアになる)
→ 得た利益 $w(i,j)$ を2人で分配:
 i の利得 $p(i)$ + j の利得 $q(j)$ = 利益 $w(i,j)$
- 雇用者 i , 労働者 j は誰ともペアを組まない → 利得 $p(i) = q(j) = 0$
- 求めたいこと: 皆が「満足する」ペアの組み方(マッチング)



皆が満足する割当と利得

「満足」「不満」とは？

• ある雇用者 i , 労働者 j は現在ペアになっておらず,

かつ $p(i) + q(j) < w(i,j)$ 成立と仮定

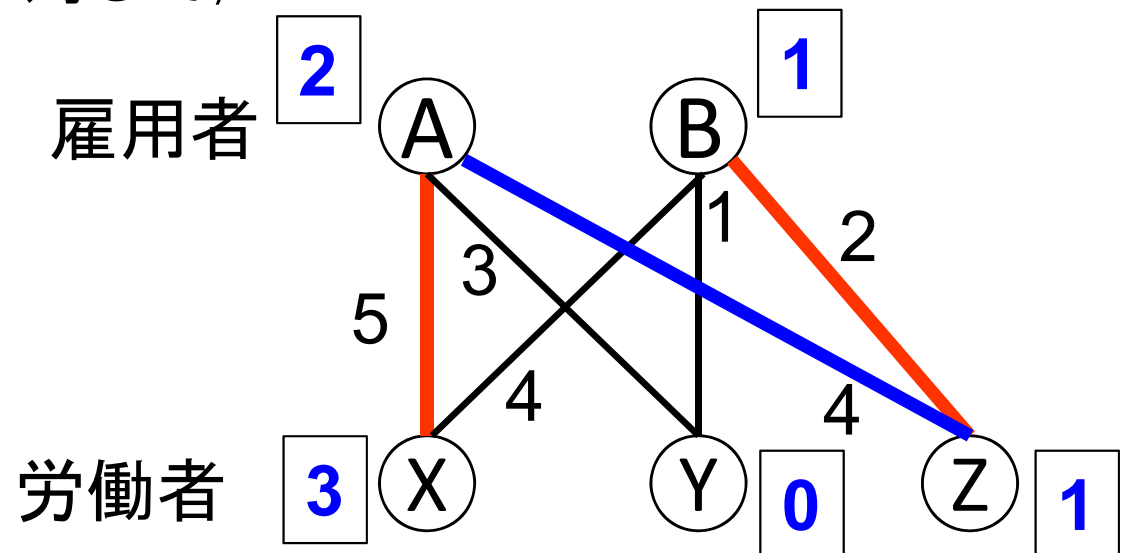
→ 現在のペアを解消し, i と j でペアになると, i と j の利得が増える

→ 現状は不満

∴ 皆が満足するための条件:

すべての雇用者 i , 労働者 j に対して,

$$p(i) + q(j) \geq w(i,j)$$



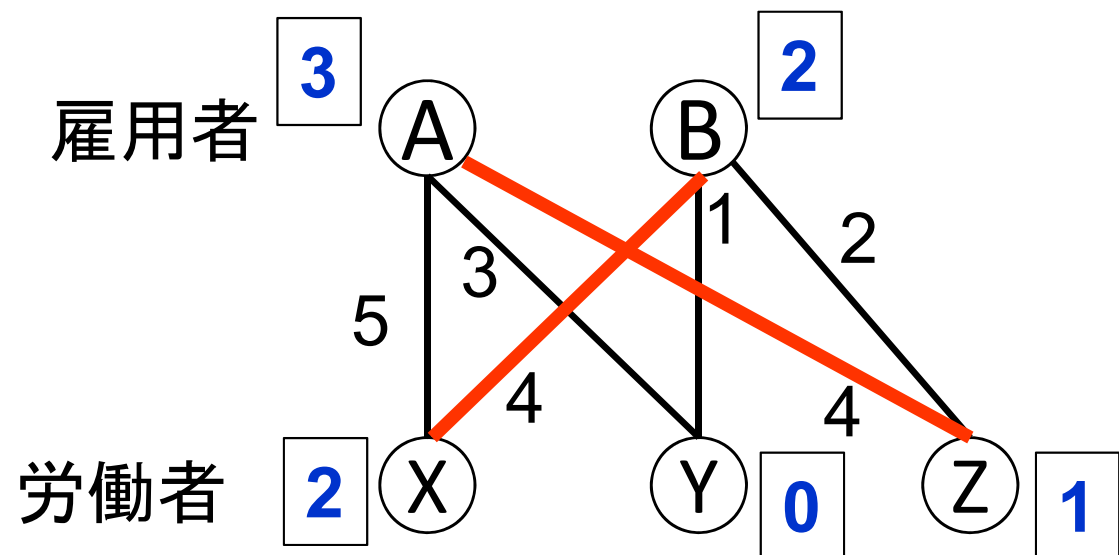
割当ゲームの定義

割当ゲームの目的:

以下の条件を満たす **マッチング M** と全員の **利得** $p(i), q(j)$ を求める

- $(i,j) \in M \rightarrow p(i) + q(j) = w(i,j)$
- i, j に接続する M の枝がない $\rightarrow p(i) = q(j) = 0$
- $p(i) + q(j) \leq w(i,j)$ (各雇用者 i , 各雇用者 j に対して)
- $p(i) \geq 0, q(j) \geq 0$ (各雇用者 i , 各雇用者 j に対して)

ゲーム理論における
「**協力ゲーム**」
の一種

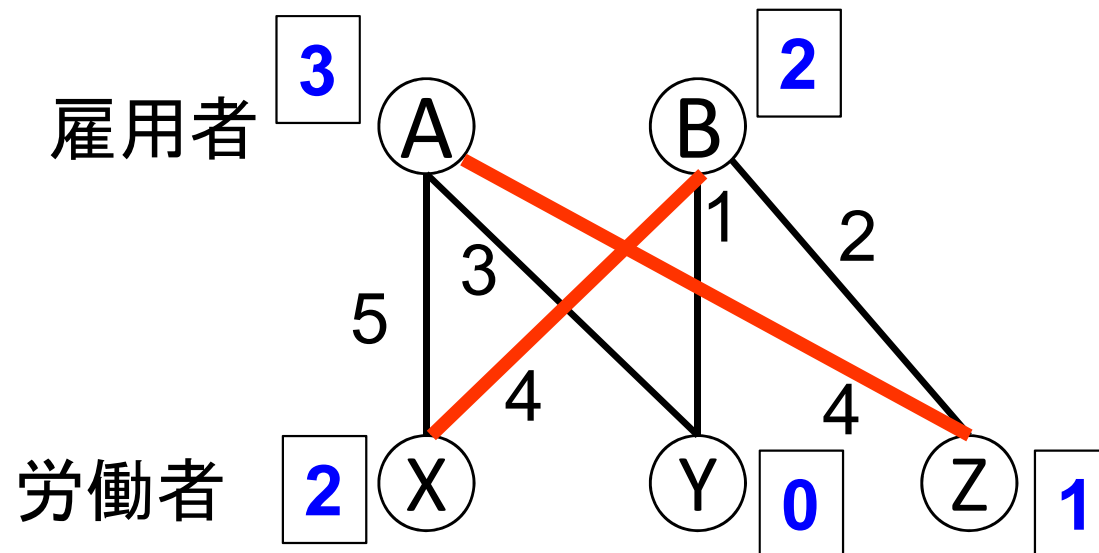


割当ゲームと最大重みマッチングの関係

定理:

割当ゲームの条件を満たすマッチング

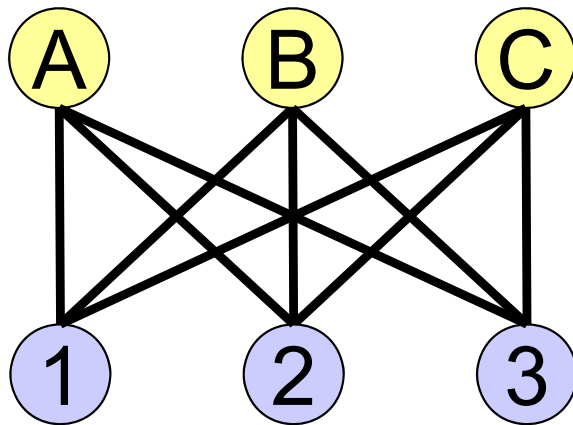
= $w(i,j)$ に関する最大重みマッチング



演習問題

問1: 以下の二部グラフの最大重みマッチングを, アルゴリズムA
およびアルゴリズムBを用いて計算せよ.

ただし, アルゴリズムAの初期マッチングは $\{(A,3), (C,1)\}$ とする.
各反復の動きが分かるように説明を書くこと.



$w(i,j)$	A	B	C
①	5	4	0
②	6	5	4
③	0	3	1

問2: 問1の問題において, A, B, Cをオークション参加者, 1, 2, 3を財と見なした
ときの均衡割当と均衡価格を求めよ. 計算過程は書かなくてもよい.

スライド22の均衡割当・均衡価格の条件が満たされていることを確認せよ.

問3: 研究室配属問題の例について考える.

学生CさんはX研究室に行きたいので, 虚偽の満足度申告をすることにした.
各研究室の満足度をどのように申告するとよいか? 理由も説明せよ.