数理経済学
第2回
最短路問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

枝長が正の場合の最短路長の計算

枝長が正の場合の最短路長

各枝の長さが正のときの最短路の性質

- 最短路長≦0となるのは，s から s への最短路のみ
- 任意の v ≠ s に対し，ある頂点 u が存在して，

  s から v への最短路 = s から u への最短路 + (u,v)

  s から v への最短路長 > s から u への最短路長

∴最短路長は，小さい順に計算すると便利

- v_i への最短路長＝i番目に小さい最短路長 とおく

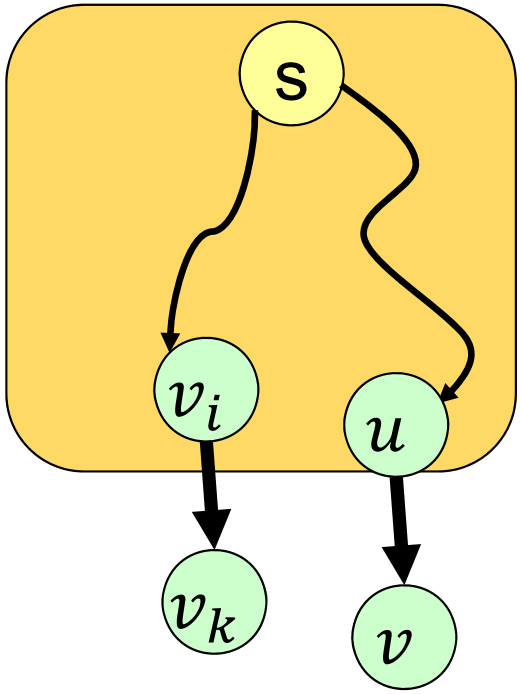
➔ $v_1 = s$

v_k への最短路 = あるi (≦k-1)が存在して，

v_i への最短路+(v_i, v_k)

v_j $(j > k)$への，$\{v_1, \ldots v_{k-1}\}$経由の最短路長

≧v_j への（条件なし）最短路長 ≧ v_k への最短路長



ダイクストラのアルゴリズム

手順0：$d(s) = 0, d(v) = +\infty$ $(\forall v \neq s)$ とおく．T=V とする．

手順1：T の要素 u で d(u) 最小のものを選ぶ．

T := T − {u} とおく．

手順2：u から出る各枝 (u,v) に対し，

$v \in T$ かつ$d(v) > d(u) + \ell(u, v)$ ならば，

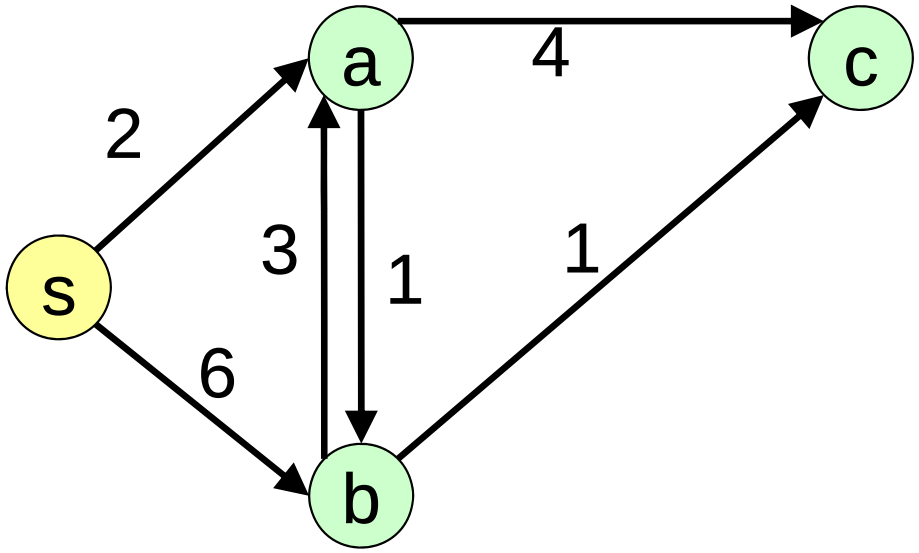
$d(v) := d(u) + \ell(u, v)$ とおく．

手順3：$T = \emptyset$ ➔各v に対して d(v) を出力．

$T \neq \emptyset$ ➔ 手順1へ．

最短路長だけでなく，最短路を計算することも
（若干の修正により）可能である

実行例



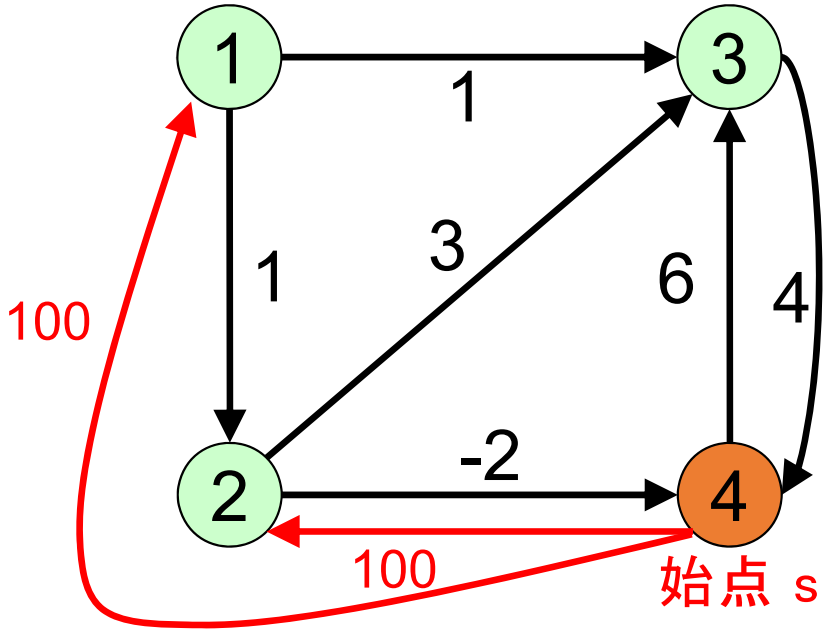
	k=0	1	2	3
s	0	0	0	0
a	∞	2	2	2
b	∞	6	3	3
c	∞	∞	6	4

差分不等式系の解の計算

変数の差の不等式系の解を求める

ケース1：全ての制約に2つの変数が現れる場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$



差分不等式系の解
＝以下のグラフのポテンシャル

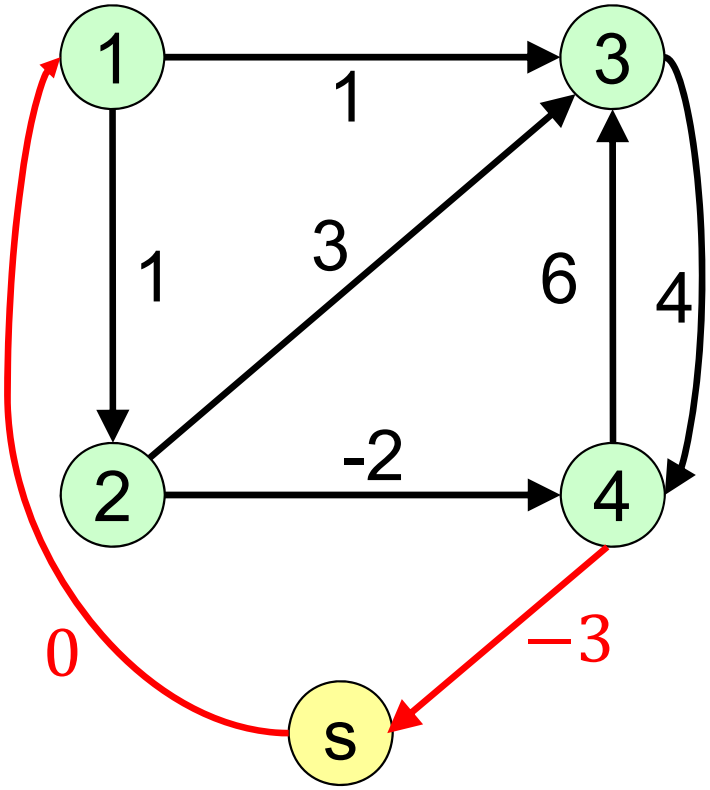
- 各変数に対応する頂点を追加
- 各制約$p_v - p_u \leq \alpha$に対し，
  長さ$= \alpha$の枝(u, v)を追加
- 適当な頂点を始点 s とおき，s から各頂点への最短路長を計算
  - 負閉路が存在する➔解なし
  - 負閉路が存在しない➔最短路長d(v)は解

※注意：頂点 s からある頂点 u への路が存在しない場合，
長さの十分大きい枝 (s, u) を追加

変数の差の不等式系の解を求める

ケース2：変数1つの制約を含む場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6,$ $p_1 \leq 0, p_4 \geq 3$



ケース1からの修正点：

(1)変数2つの制約に変換する

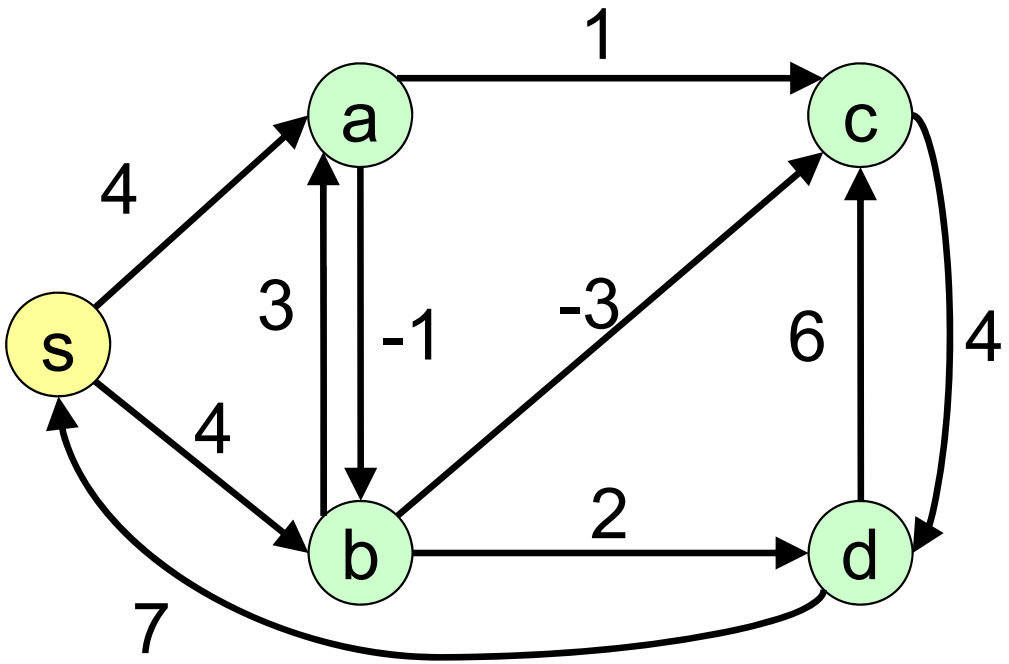
- 新しい変数 p_s を追加（頂点 s 追加）
- 各変数$p_1, \ldots, p_n$に対し，
  - $p_v \leq \beta$の形の制約が存在
    ➔$p_v - p_s \leq \beta$ に置き換え（長さβの枝(s,v)追加）
  - $p_v \geq \gamma$の形の制約が存在
    ➔$p_s - p_v \leq -\gamma$ に置き換え（長さ$-\gamma$の枝(v,s)追加）

(2) s を始点として，各頂点への最短路長を計算

- 負閉路が存在しないならば，p(s)=0となるのでうまくいく

演習問題

問1：下記のグラフにおける，s から各頂点への最短路長を，ベルマン・フォードのアルゴリズムで計算せよ．



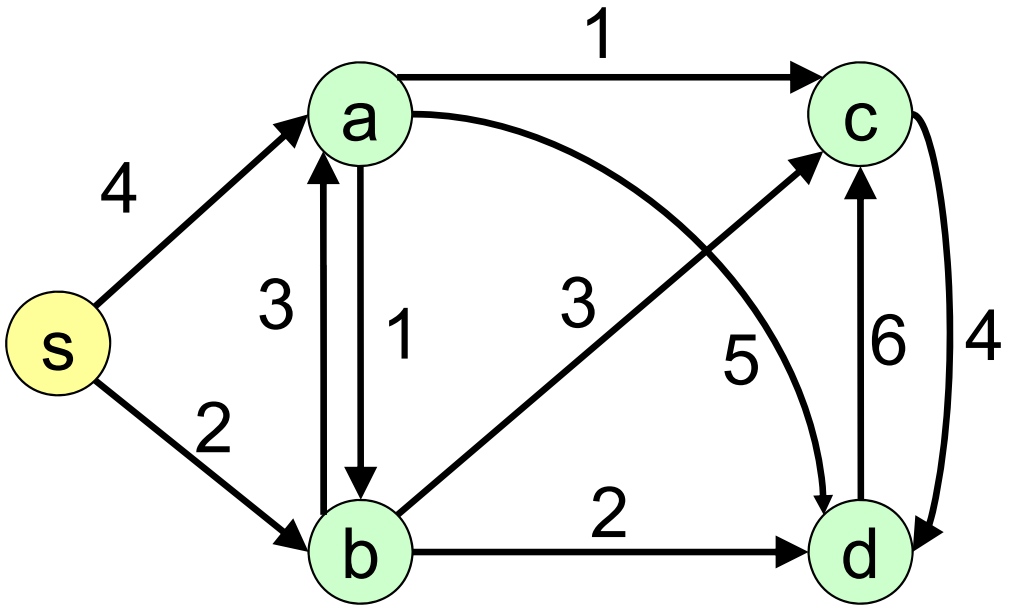
	k=0	1	2	3	4	5
s	0					
a	+∞					
b	+∞					
c	+∞					
d	+∞					

問2：次の不等式系の実行可能解を求めるか，または実行可能解をもたないことを示せ．

$$x_b - x_a \leq -1, x_a - x_b \leq 3, x_c - x_a \leq 1, x_a - x_c \leq 2,$$
$$x_c - x_b \leq -3, x_d - x_b \leq 2, x_d - x_c \leq 4, x_c - x_d \leq 6$$

演習問題

問3：下記のグラフにおける，s から各頂点への最短路長を，ダイクストラのアルゴリズムで計算せよ.



	n=0	1	2	3	4
s	0				
a	+∞				
b	+∞				
c	+∞				
d	+∞				

問4：ベルマン・フォードのアルゴリズム，およびダイクストラのアルゴリズムにおいて，最短路を計算するには，どのように修正したら良いか，説明せよ.

演習問題

問5：枝長が負のグラフにダイクストラのアルゴリズムを適用すると，なぜ最短路長が正しく計算できないのか？理由を説明せよ．

問6：差分不等式の解を求めるところのスライドのケース1において，「長さの十分大きい」枝の長さはどのように設定すれば良いか，説明せよ．