問4：連結な無向グラフにおいて，各頂点の次数が偶数ならば，

全ての枝を一筆書きでたどることができることを証明せよ.

証明：（授業で説明したものとは異なる方針に基づく）

与えられたグラフにおいて，各枝を高々1回のみ使うという条件の下で，最も枝数の多い路（閉路も含む）を

$P = (v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$（閉路のときは $v_k = v_0$）

とする. Pがオイラー閉路であることを以下で示す.

まず，「頂点 v_k に接続する枝は全て P に含まれる」ことを示す.

ある枝 (v_k, u) が P に含まれないと仮定すると，P に追加して，枝数のより多い路が得られるので矛盾.

このことと，頂点の次数が偶数であることから，$v_k = v_0$ が成り立つ（v_k, v_0 以外の頂点には枝が2本ずつ接続していることに注意）.

ここで，P がオイラー閉路でないと仮定する. すると，Pに含まれない枝(u, v)が存在するが，グラフが連結であるので，端点 v は路 P に含まれると仮定して良い.

ここで $v = v_i$ とすると，枝$(u,v)=(u, v_i)$ をPと組み合わせることで，より枝数の多い路が得られる：　$(u, v_i), (v_{i+1}, v_{i+2}), \ldots, (v_{k-1}, v_0), (v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{i-1}, v_i)$

これは P の選び方に矛盾する.

参考文献：R. ディーステル（著），根上生也，太田克弘（訳）：「グラフ理論」，
シュプリンガー東京，2000年

- 連結，かつすべての頂点の次数が偶数のグラフにおいて，
  閉路をひとつ見つける方法

（1）適当な頂点を選び，番号1を付ける.
（2）頂点1から出る枝を選び，その枝のもう一つの端点に番号2を付ける.
（3）頂点2から出る枝を選び，その枝のもう一つの端点に
　番号が付いていなかったら，番号3を付ける.
　もう一つの端点に番号 h が付いていたら，番号h, h+1, ..., 3 の頂点により閉路が出来ている.
　（以下くり返し）
（k）頂点 k- 1 から出る枝を選び，その枝のもう一つの端点に
　番号が付いていなかったら，番号 k を付ける.
　もう一つの端点に番号 h が付いていたら，番号h, h+1, ..., k の頂点により閉路が出来ている.

（注意）番号の付いていない頂点は単調に減っていく
　➔ 有限回のくり返しの後，番号の付いている頂点に必ずたどり着く.