数理工学　第2回演習課題　略解

問 A　以下で定義されるベクトルに対して，次の問いに答えよ．

$$
\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta \\ \alpha+2\beta \\ \alpha+3\beta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ (\alpha+\beta)^2 \\ (\alpha+2\beta)^2 \\ (\alpha+3\beta)^2 \end{pmatrix}, \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0)
$$

(1) ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ をグラム・シュミットの直交化の手順に従い直交化せよ．

(2) 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を QR 分解せよ．

(3) 以下の表のような 2 次元データが与えられているとする．

x	0	1	2	3
y	3	-1	0	4

このデータに対して，x の 2 次関数で y を説明するモデル式

$$
y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2
$$

を考える．このとき，最小二乗近似を用いてモデル式の係数 c_0, c_1, c_2 を求めよ．

(1) 求めたい直交化ベクトルを $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ とする．まず $\boldsymbol{q}_1$ は，

$$
r_{11} = \sqrt{\boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{a}_1} = 2, \quad \boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

と求まる．次に

$$
r_{12} = (\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2) = 2\alpha + 3\beta, \quad \boldsymbol{a}_2 - r_{12}\boldsymbol{q}_1 = \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r_{22} = \|\boldsymbol{a}_2 - r_{12}\boldsymbol{q}_1\| = \sqrt{5}\beta
$$

であるから，

$$
\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{r_{22}}(\boldsymbol{a}_2 - r_{12}\boldsymbol{q}_1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

と求まる．最後に，

$$r_{13} = (\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3) = 2\alpha^2 + 6\alpha\beta + 7\beta^2, \quad r_{23} = (\boldsymbol{q}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3) = \sqrt{5}(2\alpha\beta + 3\beta^2)$$

$$\boldsymbol{a}_3 - r_{13}\boldsymbol{q}_1 - r_{23}\boldsymbol{q}_2 = \beta^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_{33} = \|\boldsymbol{a}_3 - r_{13}\boldsymbol{q}_1 - r_{23}\boldsymbol{q}_2\| = 2\beta^2$$

となるので，

$$\boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{r_{33}}\boldsymbol{a}_3 - r_{13}\boldsymbol{q}_1 - r_{23}\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha + 3\beta & 2\alpha^2 + 6\alpha\beta + 7\beta^2 \\ 0 & \sqrt{5}\beta & \sqrt{5}(2\alpha\beta + 3\beta^2) \\ 0 & 0 & 2\beta^2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

とおくと，モデル式と与えられたデータの二乗誤差は，

$$\sum_{i=1}^{4} \{y_i - (c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2)\}^2 = (\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{c}) = \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{c}\|$$

で与えられる．この二乗誤差を最小にする係数 $\hat{\boldsymbol{c}}$ は正規方程式

$$A^T A\hat{\boldsymbol{c}} = A^T\boldsymbol{y}$$

の解となる．なお，この行列 A は (2) における $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ で $\alpha = 0, \beta = 1$ とおいたものである．QR 分解の結果を用いると正規方程式は $R\hat{\boldsymbol{c}} = Q^T\boldsymbol{y}$ に帰着し，後退代入することで $\hat{c}_2 = 2, \hat{c}_1 = -5.6, \hat{c}_0 = 2.9$ となる．

問 B 以下の命題の真偽を答えよ．ただし，真の場合はそれを証明し，偽である場合はその反例を示すこと．なお，以下では $\mathbb{R}^n$ における標準内積を考え，$\mathbb{R}^n = U \oplus W$ とする．V_1, V_2 は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

(1) $\boldsymbol{x} \notin U$ ならば $\boldsymbol{x} \in W$ である．

(2) $\boldsymbol{x} \in U$ に対して，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ のようにベクトルの和に分けると，必ず $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$ である．

(3) $V_1 \cap V_2$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

(4) $V_1 = (V_2)^{\perp}$ ならば $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ である．

(5) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ ならば $V_1 = (V_2)^{\perp}$ である．

(1) 偽．

$$U = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}, \quad W = \left\{ c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

とすると，$\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ だが，$(1,1)^T$ は U にも W にも属さない．

(2) 偽．(1) で構成した U, W を考える．このとき，$(1,0)^T \in U$ に対して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

のように，U に属さない元の和に分解できる．

(3) 真．部分空間の定義を確認すれば OK.

(4) 真．$\boldsymbol{x} \in V_1$ かつ $\boldsymbol{x} \in V_2 = (V_1)^{\perp}$ とする．このとき，直交補空間の定義から $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = 0$ であり，内積の定義から $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

(5) 偽．

$$V_1 = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

とすると，$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ である．しかし，V_1 と V_2 は直交していない．