

数理工学 第2回演習課題

2018年10月12日

問 A 以下で定義されるベクトルに対して、次の問いに答えよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha + 3\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ (\alpha + \beta)^2 \\ (\alpha + 2\beta)^2 \\ (\alpha + 3\beta)^2 \end{pmatrix}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0)$$

- (1) ベクトル $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ をグラム・シュミットの直交化の手順に従い直交化せよ。
- (2) 行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ を QR 分解せよ。
- (3) 以下の表のような 2 次元データが与えられているとする。

x	0	1	2	3
y	3	-1	0	4

このデータに対して、 x の 2 次関数で y を説明するモデル式

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

を考える。このとき、最小二乗近似を用いてモデル式の係数 c_0, c_1, c_2 を求めよ。

問 B 以下の命題の真偽を答えよ。ただし、真の場合はそれを証明し、偽である場合はその反例を示すこと。なお、以下では $\mathbb{R}^n$ における標準内積を考え、 $\mathbb{R}^n = U \oplus W$ とする。 V_1, V_2 は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

- (1) $\mathbf{x} \notin U$ ならば $\mathbf{x} \in W$ である。
- (2) $\mathbf{x} \in U$ に対して、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ のようにベクトルの和に分けると、必ず $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$ である。
- (3) $V_1 \cap V_2$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。
- (4) $V_1 = (V_2)^\perp$ ならば $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ である。
- (5) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ ならば $V_1 = (V_2)^\perp$ である。

(注意)

- 答えだけでなく、計算や証明の過程も答案に書いてください。
- 時間内に終わらない場合は、**15:00** までに **西 9 号館 308 号室前** のフォルダに入れておいてください。