数理工学　第 7 回演習略解

問 A　区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(t)$ を関数

$$f_N(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

で近似することを考える．このとき，次の平均 2 乗誤差

$$\frac{1}{2\pi}\|f_N(t) - f(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_N(t) - f(t))^2 dt$$

が最小になるような $f_N(t)$ の係数 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \ldots \beta_N$ が，$f(t)$ のフーリエ係数に一致することを証明せよ．

平均 2 乗誤差は，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\|f_N(t) - f(t)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\left\|\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) - f(t)\right\|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)\right\}^2 dt \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)\right\}dt \\
&= A_1 + A_2 - A_3 \quad (\text{とおく})
\end{aligned}$$

となる．第 2 項は三角関数の定積分の結果から，

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)\right\}^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\alpha_0^2}{4}dt + \frac{\alpha_0}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\sum_{n_1=1}^{N}\sum_{n_2=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha_{n_1}\cos n_1 t + \beta_{n_1}\sin n_1 t)(\alpha_{n_2}\cos n_2 t + \beta_{n_2}\sin n_2 t)dt \\
&= \frac{\alpha_0^2}{4} + 0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)
\end{aligned}$$

のように計算できる．一方で第３項はフーリエ係数の定義から，

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt)\right\}dt \\
&= \frac{\alpha_0}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt+\sum_{n=1}^{n}\alpha_n\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt\right)+\sum_{n=1}^{N}\beta_n\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt\right) \\
&= \frac{\alpha_0 a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n a_n+\sum_{n=1}^{N}\beta_n b_n
\end{aligned}$$

となる．以上より，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\|f_N(t)-f(t)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2dt+\frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2)-\alpha_0 a_0-2\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n a_n+\beta_n b_n)\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2dt+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n-a_n)^2+\sum_{n=1}^{N}(\beta_n-b_n)^2\right\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{n}a_n^2+\sum_{n=1}^{N}b_n^2\right\}
\end{aligned}$$

となるが，右辺第１項と第３項は $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$ の取りかたに依らない．よって $\alpha_0 = a_0, \alpha_n = a_n, \beta_n = b_n$ のときに最小２乗誤差は最小となり，また最小となるのはそのときに限る．

問 B

(1) 区間 $[-\pi, \pi]$ において $f(t) = t^2$ をフーリエ級数展開せよ．

(2) 次の等式を示せ．

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

(1) $f(t)$ は偶関数であるから $b_n = 0$. また，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2dt = \frac{2\pi^2}{3}.$$

一方，

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\left\{\left[t^2\frac{\sin nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}2t\frac{\sin nt}{n}dt\right\} = -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin ntdt \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left\{\left[-t\frac{\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nt}{n}dt\right\} = \frac{2}{n^2\pi}\{\pi\cos n\pi+\pi\cos(-n\pi)\} \\
&= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n
\end{aligned}$$

であるからしたがって，

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

(2) (1) で得られたフーリエ級数展開において $t=\pi$ とおけば,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2} \Leftrightarrow \frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

問 C

(1) $f(t)=\cos\omega t$ を区間 $[-\pi,\pi]$ においてフーリエ級数展開せよ．ただし，ω は整数でない実数である．

(2) 次の等式を示せ．

$$\frac{\omega\pi}{\sin\omega\pi} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^2}{\omega^2-n^2}(-1)^n$$

(1) $f(t)$ は偶関数であるから，$b_n=0$ となる．また,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\omega t dt = \frac{2\sin\omega\pi}{\omega\pi},$$

となり,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\omega t\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\cos(\omega+n)t+\cos(\omega-n)t\}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin(\omega+n)\pi}{\omega+n}+\frac{\sin(\omega-n)\pi}{\omega-n}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n\sin\omega\pi}{\omega+n}+\frac{(-1)^n\sin\omega\pi}{\omega-n}\right\} \\ &= \frac{2\omega(-1)^n}{\pi(\omega^2-n^2)}\sin\omega\pi\end{aligned}$$

となる．したがって,

$$f(t) = \frac{\sin\omega\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{\omega}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\omega(-1)^n}{\omega^2-n^2}\cos nt\right\}$$

を得る．

(2) (1) で得られた級数展開において，$t=0$ を代入すればよい．