

問題 A 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ.

$$(1) \frac{1}{s(s^2+4)}$$

$$(2) \frac{17s}{(2s-1)(s^2+4)}$$

$$(3) \log \frac{s+1}{s-1} \quad (s > 1)$$

$$(4) \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \quad (s > 1, n \in \mathbb{N})$$

(1) $\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{2}L(1)L(\sin 2t)$ であるから, 合成定理より,

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+4)}\right) = \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2(t-\tau) d\tau = \frac{1}{4} [\cos 2(t-\tau)]_0^t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t.$$

(2) 部分分数に展開すると,

$$\frac{17s}{(2s-1)(s^2+4)} = \frac{2}{2s-1} + \frac{8-s}{s^2+4} = \frac{2}{2s-1} + \frac{8}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4}$$

となる. よって

$$L^{-1}\left(\frac{17s}{(2s-1)(s^2+4)}\right) = e^{t/2} + 4 \sin 2t - \cos 2t.$$

(3) $f(t) = L^{-1}(\log \frac{s+1}{s-1})$ とおくと, 像関数の微分則から,

$$-tf(t) = L^{-1}\left(\frac{d}{ds} \log \frac{s+1}{s-1}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right) = e^{-t} - e^t$$

となる. したがって,

$$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}.$$

(4) 原関数の微分則より,

$$L\left\{\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right\} = s^n L(t^n e^{-t}) = \frac{n!s^n}{(s+1)^{n+1}}$$

を得る. よって移動則を用いると,

$$L\left\{e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right\} = \frac{n!(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

となる. したがって,

$$L^{-1}\left\{\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right\} = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}).$$

問題 B ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解け.

$$(1) \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} - 6\frac{dx(t)}{dt} + 15x(t) = 2\sin 3t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = -4$$

$$(2) \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = h(t), \quad x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0$$

ただし, $h(t)$ は $0 \leq t < \pi$ で 1 を取り, それ以外では 0 を取る関数である.

(1) 両辺をラプラス変換して整理すると,

$$s^2X(s) - 6sX(s) + 15X(s) + s - 2 = \frac{6}{s^2 + 9}$$

が得られる. よって,

$$X(s) = \frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)}$$

となるが,

$$\frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)} = \frac{ax + b}{s^2 + 9} + \frac{cx + d}{s^2 - 6s + 15}$$

とおいて係数を比較すると結局,

$$X(s) = \frac{1}{10} \left(\frac{s+1}{s^2+9} + \frac{-11s+25}{s^2-6s+15} \right)$$

となる. いま,

$$L^{-1} \left(\frac{s+1}{s^2+9} \right) = L^{-1} \left(\frac{s}{s^2+9} \right) + L^{-1} \left(\frac{1}{s^2+9} \right) = \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t$$

となり, また,

$$\frac{-11s+25}{s^2-6s+15} = \frac{-11(s-3)-8}{(s-3)^2+6} = \frac{-11(s-3)}{(s-3)^2+6} - \frac{8}{(s-3)^2+6}$$

となるから,

$$L^{-1} \left(\frac{-11s+25}{s^2-6s+15} \right) = -11e^{3t} \cos \sqrt{6}t - \frac{8}{\sqrt{6}}e^{3t} \sin \sqrt{6}t$$

が得られる. したがって,

$$x(t) = \frac{1}{10} \left(\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t - 11e^{3t} \cos \sqrt{6}t - \frac{8}{\sqrt{6}}e^{3t} \sin \sqrt{6}t \right)$$

(2) 両辺をラプラス変換すると,

$$s^2X(s) - sx(0) - x^{(1)}(0) + X(s) = L(h(t))$$

となる. ここで $X(s) = L(x(t))$ である. これを整理して,

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 1} L(h(t)) = L(\sin t) L(h(t))$$

が得られる. よって合成定理から,

$$x(t) = L^{-1}\{L(\sin t)L(h(t))\} = \int_0^t \sin(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

となる. ゆえに, $0 \leq t < \pi$ のときは

$$x(t) = \int_0^t \sin(t - \tau)d\tau = [\cos(t - \tau)]_0^t = 1 - \cos t$$

となり, $t \geq \pi$ のときは

$$x(t) = \int_0^\pi \sin(t - \tau)d\tau = [\cos(t - \tau)]_0^\pi = \cos(t - \pi) - \cos t = -2 \cos t$$

となる.