数理工学　期末試験

2016 年 11 月 22 日

注意事項

1. 以下の問 A から問 D の全てに解答せよ．
2. 点数配分は各大問につき 25 点である．
3. 提出する答案全てに学籍番号・氏名・問題番号を記述すること．

問 A.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有空間をそれぞれ求めよ．

(2) 行列 A を対角化する直交行列 P と対角行列 D をそれぞれ求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} A^{2n}$ を計算せよ．

問 B. 実数空間において内積が $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ で与えられているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$$

(1) $\ker(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とその直交補空間 $(\ker(A))^\perp$ をそれぞれ求めよ．

(2) ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ で張られる空間を V とするとき，V への射影行列 P_V を計算せよ．また，点 $(2,6,8)^T$ に最も近い V 上の点を求めよ．

(3) ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\}$ で張られる空間を W とするとき $P_W = P_V$ である．なぜこのような結果になるのか，考えられる理由を述べよ．

問 C. ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解け．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = u_a(t), \quad x(0) = 0,\ \ x'(0) = 1$$

ここで $u_a(t)$ は，ある定数 $a > 0$ に対して，$t \geq a$ で 1 を取りそれ以外は 0 を取る関数である．
(ヒント: 関数 $u_a(t)f(t)$ のラプラス変換を考えよ)

問 D.

(1) 関数 f が $f(t) = \begin{cases} \pi - t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$ を満たし，かつ任意の $t \in \mathbb{R}$ において $f(t+2\pi) = f(t)$ であるとする．このとき，$f(t)$ を区間 $[0, 2\pi]$ においてフーリエ級数展開せよ．

(2) 等式 $\dfrac{\pi^2}{8} = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \cdots$ を示せ．

(必要であれば裏面の公式を用いてよい)

ラプラス変換　関数 $f(t)$ のラプラス変換 $L(f(t))$ は

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

で与えられる．以下は主要な関数に対するラプラス変換の結果を示したものである．

$f(t)$	$L(f(t))$	$f(t)$	$L(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{bt}\sin at$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

ラプラス変換の性質

・移動則 $L(e^{at}f(t)) = F(s-a)$

・原関数の微分則 $L(-tf(t)) = \frac{d}{ds}F(s)$

・高階の微分則

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

ここに $f^{(n)}$ は f の n 階導関数を表す．

・合成定理

$$L(f*g(t)) = L(f(t))L(g(t)), \quad f*g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

フーリエ級数展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nt + b_n\sin nt\},$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt.$$

グラム・シュミットの直交化　V の 1 つの基底を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ としたとき，

(1) $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1/\|\boldsymbol{a}_1\|$

(2) $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{b}_2/\|\boldsymbol{b}_2\|$

(3) $\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{b}_k/\|\boldsymbol{b}_k\|$ $(k = 3, 4, \ldots, n)$

の手順で V の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を構成することができる．