

注意事項

1. 以下の問 A から問 D の全てに解答せよ.
2. 点数配分は各大問につき 25 点である.
3. 提出する答案全てに学籍番号・氏名・問題番号を記述すること.

問 A. 実数空間において内積が $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$ で与えられているとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の QR 分解を求めよ.
- (2) (1) で求めた QR 分解を用いて方程式 $A^T A \boldsymbol{x} = A^T \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ.
- (3) (2) で求めた解はどのような意味を持つか説明せよ.

問 B.

- (1) 2 次形式 $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ と対称行列 A を用いて $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ の形で表せ.
- (2) ある変換 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T = T \boldsymbol{x}$ を用いて (1) の 2 次形式を標準形 $\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2$ で表せ.
- (3) 次の命題の真偽を理由をつけて答えよ. ただし I は単位行列を表す.
 - (a) 直交行列の行列式は 1 か -1 のどちらかである.
 - (b) ある行列 D と定数 $\varepsilon > 0$ に対して, $D^T D + \varepsilon I$ は正定値である.

問 C. ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解け.

- (1)
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 3 \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{3t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$
- (2)
$$\frac{dx(t)}{dt} - 3x(t) = e^t \cos t, \quad x(0) = 2$$

問 D.

- (1) 関数 $f(t) = |t|$ を区間 $[-\pi, \pi]$ においてフーリエ級数展開せよ.
- (2) 等式 $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$ を示せ.

(必要であれば裏面の公式を用いてよい)

ラプラス変換 関数 $f(t)$ のラプラス変換 $L(f(t))$ は

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

で与えられる。以下は主要な関数に対するラプラス変換の結果を示したものである。

$f(t)$	$L(f(t))$	$f(t)$	$L(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$

ラプラス変換の性質

- ・移動則 $L(e^{at} f(t)) = F(s-a)$
- ・原関数の微分則 $L(-t f(t)) = \frac{d}{ds} F(s)$
- ・高階の微分則

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

ここに $f^{(n)}$ は f の n 階導関数を表す。

- ・合成定理

$$L(f * g(t)) = L(f(t))L(g(t)), \quad f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

フーリエ級数展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nt + b_n \sin nt\},$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt.$$

グラム・シュミットの直交化 V の 1 つの基底を $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ としたとき,

$$(1) \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 / \|\mathbf{a}_1\|$$

$$(2) \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_2 / \|\mathbf{b}_2\|$$

$$(3) \quad \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{b}_k / \|\mathbf{b}_k\| \quad (k = 3, 4, \dots, n)$$

の手順で V の正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ を構成することができる。