

問 A 人口の変化を微分方程式でモデル化することを考える. いま, $N(t) (> 0)$ を時刻 t における, ある国の総人口を表すものとする. 微小時間区間 Δt における出生数と死亡数は, ともに $N(t)$ と Δt に比例する. すなわち定数 α, β を用いて, 出生数 $= \alpha N(t)\Delta t$, 死亡数 $= \beta N(t)\Delta t$ と表される. したがって Δt における総人口の増分 $\Delta N(t)$ は

$$\Delta N(t) = \alpha N(t)\Delta t - \beta N(t)\Delta t = (\alpha - \beta)N(t)\Delta t = kN(t)\Delta t \quad (*)$$

と表される ($k = \alpha - \beta$). このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 式 (*) から導かれる微分方程式の解 (総人口変化モデル) を求めよ. ただしその際には $N(0) = N_0$ として特殊解を求めること.
- (2) 次の表は日本のおおよその総人口を表したものである (出典: 総務省統計局).

年度	総人口
1910 年	50×10^6
1920 年	55×10^6

このとき, 1910 年に $t = 0$, 1920 年に $t = 1$ を対応させて日本の総人口変化モデルを作成せよ. また, このモデルで予測される 2010 年の総人口に一番近いものは次のうちどれか答えよ.

(a)7000 万人, (b)9000 万人, (c)1 億 1000 万人, (d)1 億 3000 万人

ただし, $\log_e(1.1) = 0.0953$, $(1.1)^{10} = 2.5937$, $e = 2.7182$ である.

- (3) 式 (*) を修正した式 $\Delta N(t) = kN(t)(1 - \frac{N(t)}{N_\infty})\Delta t$ を考える. ただし N_∞ はある正の定数である. (1) と同様に, この式から導かれる微分方程式の解を求めよ. また, $k > 0$, $t \rightarrow \infty$ のときの解の挙動を明らかにし, (1) で得られた解との違いを考察せよ.

- (1) 微分方程式は

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$$

で与えられる. $N(t) > 0$ だから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} &= k \\ \therefore \int \frac{1}{N(t)} dN(t) &= kt + C \\ \therefore \log |N(t)| &= kt + C \\ \therefore N(t) &= C' e^{kt}. \end{aligned}$$

一方, $N(0) = N_0$ より, $C' = N_0$. 以上から, 求める特殊解は $N(t) = N_0 e^{kt}$ となる.

- (2) $N(0) = 50 \times 10^6$ とおくと, $N(1) = 55 \times 10^6 = 50 \times 10^6 e^k$. よって $k = \log(55/50) = \log(1.1)$.
このとき, 2010 年の総人口の予測値は, $t = 10$ として,

$$N(10) = 50 \times 10^6 e^{10 \log(1.1)} = 50 \times 10^6 \times \log(1.1)^{10} = 50 \times 2.5937 \times 10^6 \simeq 129 \times 10^6.$$

よって (d) が答え.

- (3) 微分方程式は,

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{N_\infty} \right)$$

で与えられる. よって,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{N(t)(1 - \frac{N(t)}{N_\infty})} dt &= kt + C \\ \therefore \int \left(\frac{1}{N(t)} + \frac{\frac{1}{N_\infty}}{1 - \frac{N(t)}{N_\infty}} \right) dt &= kt + C \\ \therefore \frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{N_\infty}} &= C' e^{kt}. \end{aligned}$$

いま, $N(0) = N_0$ だから,

$$C' = \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{N_\infty}} = \frac{N_0 N_\infty}{N_\infty - N_0}.$$

したがって,

$$N(t) = \frac{N_\infty}{1 + \left(\frac{N_\infty - N_0}{N_0} \right) e^{-kt}}$$

を得る. いま, $k > 0$ の場合において $t \rightarrow \infty$ を考えると, $N(t) \rightarrow N_\infty$ である. 一方, (1) の場合は $N(t) \rightarrow \infty$ となる. つまり, (1) のモデルでは総人口は上限なく増加していくが, (3) のモデルではその上限が N_∞ で抑えられている. 食物や居住地などは有限であるから, 総人口が限りなく増加するとは一般に考えがたく, (3) のモデルの方が妥当である.

問 B

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$$

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \alpha(x) + \beta(x)y + \gamma(x)y^2$$

の特殊解を y_1 とするとき, $u = y - y_1$ において u に関するベルヌイの微分方程式に変形せよ.

(3) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x \frac{dy}{dx} - y + y^2 = x^2$$

(1) $y = ux$ とおくと, $y' = xu' + u$ となり, よって方程式は

$$\begin{aligned} 2ux^2 \left(x \frac{du}{dx} + u \right) &= u^2 x^2 - x^2 \\ \therefore 2xu \frac{dx}{du} &= -u^2 - 1 \\ \therefore \frac{2u}{u^2 + 1} \frac{du}{dx} &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

となるが, これは変数分離型であるからしたがって,

$$\begin{aligned} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du &= -\log |x| + C \\ \therefore \log(u^2 + 1) &= -\log |x| + C \\ \therefore x(u^2 + 1) &= C' \\ \therefore x^2 + y^2 &= C'x. \end{aligned}$$

(2) y_1 が特殊解であるから,

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha(x) + \beta(x)y_1 + \gamma(x)y_1^2$$

をみたすことに注意すると, $u = y - y_1$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \alpha(x) + \beta(x)y + \gamma(x)y^2 - \{\alpha(x) + \beta(x)y_1 + \gamma(x)y_1^2\} \\ &= \beta(x)(y - y_1) + \gamma(x)(y^2 - y_1^2) \\ &= \beta(x)(y - y_1) + \gamma(x)(y - y_1)(y + y_1) \\ &= \beta(x)u + \gamma(x)u(u + 2y_1). \end{aligned}$$

つまり,

$$\frac{du}{dx} - \{\beta(x) + 2y_1\gamma(x)\}u = \gamma(x)u^2$$

となりこれは, $n = 2$ の場合のベルヌイの微分方程式である.

- (3) (2) の事実にしたがって一般解を求める. いま, $y_1 = x$ が特殊解である. よって $u = y - x$ とおくと, 方程式は,

$$x\left(\frac{du}{dx} + 1\right) - (u + x) + (u + x)^2 = x^2$$

となる. これを整理して,

$$\frac{du}{dx} + \frac{2x-1}{x}u = -\frac{1}{x}u^2$$

を得る. これはベルヌイの微分方程式なので, $z = 1/u$ とおけば,

$$-\frac{dz}{dx} + \left(2 - \frac{1}{x}\right)z = -\frac{1}{x}, \quad \therefore \frac{dz}{dx} - \left(2 - \frac{1}{x}\right)z = \frac{1}{x}.$$

この解を一般解の公式 (22.13) で求めると,

$$\begin{aligned} z &= \left\{ \int \frac{1}{x} e^{-\int (2-\frac{1}{x})dx} dx + C \right\} e^{\int (2-\frac{1}{x})dx} \\ &= \left\{ \int \frac{1}{x} e^{-2x+\log|x|} dx + C \right\} e^{2x-\log|x|} \\ &= \left\{ \int \frac{|x|}{x} e^{-2x} dx + C \right\} \frac{e^{2x}}{|x|} \\ &= \left\{ \pm \int e^{-2x} dx + C \right\} \left(\pm \frac{e^{2x}}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(C' e^{2x} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

以上より,

$$y = x + u = x + \frac{1}{z} = x \left(1 + \frac{1}{C' e^{2x} - \frac{1}{2}} \right).$$