

数理工学 第3回追加問題

注意：参考用の追加問題です．提出の必要は一切ありません．

問 A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値と固有空間をそれぞれ求めよ．
- (2) 行列 A を対角化する直交行列 P と対角行列 D をそれぞれ求めよ．
- (3) $\mathbb{R}^3$ において，部分空間 $(\ker(A))^\perp$ と点 $(2, 2, 2)^T$ との最短距離を計算せよ．

問 B

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1) ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ をグラム-シュミットの直交化の手順に従い直交化せよ．
- (2) 行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ を QR 分解せよ．
- (3) ベクトル $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ で張られる空間を W とするとき，点 $(1, 4, 6)^T$ に最も近い W 上の点を求めよ．

問 C 総人口 700,000 人のある都市において，ある携帯キャリア会社の契約人数の 1 年ごとの推移を調査した．結果，そのキャリア会社に契約していた人のうち 30%が他社に移り，また，元々そのキャリア会社と契約していなかった人のうち 5%が新たに契約していたことが分かった．今年の契約人数と非契約人数をそれぞれ $x^{(0)}, y^{(0)}$ で表し， n 年後の契約人数と非契約人数をそれぞれ $x^{(n)}, y^{(n)}$ で表すとき，次の問いに答えよ．ただし総人口は年によって変わらないと仮定する．

- (1) $\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix}$ となるように A を定めよ．
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$ を求めよ．

問 D 変数 t の関数 $y_i = f_i(t)$ ($i = 1, 2$) を考える．初期値が $\mathbf{y}_0 = (1, 1)^T$ であるとき，次の線形微分方程式系の解を求めよ．

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases}$$