

問 A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

(2) 行列 A を 直交行列 を用いて対角化せよ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を計算せよ.

(1) 固有値は $\lambda = 1$ (重解), $\lambda = 1/2$. 対応する固有ベクトルは, $\lambda = 1$ のとき $(0, 1, 0)^T$ と $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ (ただし正規直交化済み). また, $\lambda = 1/2$ のとき $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T$.

(2)

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とおけば P は直交行列であり, A はこの P を用いて以下のように対角化される.

$$\Lambda = P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(3) (2) で求めた P に対して, $P^T P = I$ であるから,

$$A^n = (P \Lambda P^T)^n = P \Lambda P^T P \Lambda P^T \cdots P \Lambda P^T = P \Lambda \Lambda \cdots \Lambda P^T = P \Lambda^n P^T$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A^n &= P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^n \right) P^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 B $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ の関数

$$f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3$$

を条件 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ の下で最適化することを考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ (2 次形式) となるように実対称行列 A を定めよ。
- (2) 行列 A を直交行列 P を用いて対角化せよ。
- (3) A が正定値行列であるかどうか、理由をつけて答えよ。
- (4) 変換 $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$ で定められるベクトルを $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ とするとき、2 次形式 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ と条件 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ を $\mathbf{y}$ の式で表せ。
- (5) $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ の条件の下で $f(\mathbf{x})$ の最大値と、それを達成する $\mathbf{x}$ を求めよ。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 固有値は $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$ となり、対応する (正規化された) 固有ベクトルはそれぞれ、

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって $P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ とおけば P は直交行列であり、

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

のように対角化される。

(3) 固有値が全て正であるので正定値行列である。

(4) $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$ を $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ に代入すると

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (P \mathbf{y})^T A (P \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T A P \mathbf{y} = 6y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2$$

となる。また $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ にも代入すると、

$$1 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (P \mathbf{y})^T (P \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T P \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

となる。

- (5) (4) より最適化問題は、条件 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ の下で $6y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2$ を最大化する問題に帰着する.

$$6y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2 \leq 6(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 6$$

であるから、 $y_1^2 = 1, y_2^2 = 0, y_3^2 = 0$ としたときに $f(\mathbf{x})$ は最大値 6 をとる. よって最大値を達成する $\mathbf{x}$ は、 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ より、

$$\mathbf{x} = P \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \mathbf{p}_1$$

である.

問 C 以下の命題の真偽を答えよ. 真であればそれを証明し、そうでなければ反例を示せ.

- (1) A が正定値行列であるとする. A^{-1} も正定値行列である.
- (2) 対称行列 A の行列式が正ならば、 A の固有値は全て正である.

- (1) 真. 正定値行列 A はある直交行列 P と対角行列 Λ (対角要素は全て正) を用いて $A = P\Lambda P^T$ と対角化できる. よって、 $A^{-1} = P\Lambda^{-1}P^T$ であり、対角行列 Λ^{-1} の対角要素は全て正である. したがって A^{-1} も正定値行列.
- (2) 偽. 以下の反例が存在する.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

このとき、 A の行列式は 1 であるが、固有値は -1 となる.