数理工学　第 1 回演習課題　略解

問 A　$m \times n$ 実行列 A, B の (i,j) 要素をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とし，

$$(A \cdot B) = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 上で定義した $(A \cdot B)$ が内積になることを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ に対して $(A \cdot B)$ を求めよ．

(3) (2) で定義した A, B に対して A と B のなす角 θ を求めよ．ただし，θ は $\cos\theta = \frac{(A \cdot B)}{\|A\|\|B\|}$ で定義され，$0 \leq \alpha - \beta \leq \pi$ とする．

(1) 内積の公理を確認．(i) $(A \cdot A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$ であり，明らかに $(A \cdot A) = 0$ となるのはすべての (i,j) に対して $a_{ij} = 0$ である場合に限る．(ii) $(B \cdot A) = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}\{(B^T A)^T\} = \mathrm{tr}(A^T B) = (A \cdot B)$. (iii) $((\alpha A + \beta B) \cdot C) = \mathrm{tr}\{(\alpha A + \beta B)^T C\} = \alpha \mathrm{tr}(A^T C) + \beta \mathrm{tr}(B^T C) = \alpha(A \cdot C) + \beta(B \cdot C)$.

(2) $(A \cdot B) = 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$.

(3) $\|A\|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2$. 同様にして $\|B\|^2 = 2$. よって (2) より，

$$\frac{(A \cdot B)}{\|A\|\|B\|} = \frac{2\cos(\alpha - \beta)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \cos(\alpha - \beta)$$

でありしたがって $\theta = \alpha - \beta$.

問 B　次のベクトルおよび行列が与えられているとする．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 4 & 28 & 24 \\ 3 & 24 & 27 \end{pmatrix}.$$

ここで，K は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ のグラム行列である．すなわち K の (i,j) 要素は $(\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j)$ である．このとき，$\boldsymbol{x} = (-1, 0, 1)^T$ のノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ を計算せよ．

$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3)$ であるから，

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) &= \frac{1}{4}((\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3) \cdot (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3)) \\ &= \frac{1}{4}\{(\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1) + (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_3) + 2(\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2) - 2(\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3) - 2(\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3)\} \\ &= \frac{1}{4}(7 + 28 + 27 + 8 - 6 - 48) = \frac{16}{4} = 4. \end{aligned}$$

よって $\|\boldsymbol{x}\| = 2$.

問 C 実空間を考え，内積は標準内積 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ で与えられているとする．

(1) 平面 $W = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 |\ 2x - y - z = 0\}$ への射影行列 P_W を求めよ．

(2) 点 $(1,4,6)^T$ に一番近い平面 W 上の点を求めよ．ここで W は (1) で定義した平面である．

(1) W を張る基底は例えば $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,0)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,0,2)^T$ であるから，$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)$ とおくと求める射影行列 P_W は，

$$P_W = A(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$P_W\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

問 D

(1) 実空間で標準内積を考える．このとき射影行列 P はべき等 $(P^2 = P)$ であることを示せ．

(2) 実空間で標準内積を考える．このとき直線 $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{a}$ への射影行列を求めよ．

(3) 内積空間 V の正規直交基底を $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_K\}$ とする．このとき $\boldsymbol{x} \in V$ に対して以下を示せ．

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}_1)^2 + \cdots + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}_K)^2.$$

(1) ある行列 A によって $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ と表されるから，

$$P^2 = A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}IA^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P.$$

(2) 直線 $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{a}$ の基底は $\boldsymbol{a}$ であるから，$\boldsymbol{x}$ への射影行列は $\|\boldsymbol{a}\|^{-2}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ となる．

(3) $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_K\}$ は V の基底であるから，ある $c_i \in \mathbb{R}$ が存在して $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_K\boldsymbol{y}_K$ と書ける．一方，$\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_K\}$ は正規直交でもあるから，

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}_j) = \left(\left(\sum_{i=1}^K c_i\boldsymbol{y}_i\right)\cdot\boldsymbol{y}_j\right) = \sum_{i=1}^K c_i(\boldsymbol{y}_i\cdot\boldsymbol{y}_j) = c_j(\boldsymbol{y}_j\cdot\boldsymbol{y}_j) = c_j$$

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}) = \left(\left(\sum_{i=1}^K c_i\boldsymbol{y}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^K c_j\boldsymbol{y}_j\right)\right) = \sum_{i,j} c_ic_j(\boldsymbol{y}_i\cdot\boldsymbol{y}_j) = \sum_{i=1}^K c_i^2(\boldsymbol{y}_i\cdot\boldsymbol{y}_i) = \sum_{i=1}^K c_i^2.$$

よって示された．