

数理工学 第1回演習課題

2018年10月2日

問 A $m \times n$ 実行列 A, B の (i, j) 要素をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とし,

$$(A \cdot B) = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

を定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 上で定義した $(A \cdot B)$ が内積になることを示せ.
- (2) $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$ に対して $(A \cdot B)$ を求めよ.
- (3) (2) で定義した A, B に対して A と B のなす角 θ を求めよ. ただし, θ は $\cos \theta = \frac{(A \cdot B)}{\|A\| \|B\|}$ で定義され, $0 \leq \alpha - \beta \leq \pi$ とする.

問 B 次のベクトルおよび行列が与えられているとする.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 4 & 28 & 24 \\ 3 & 24 & 27 \end{pmatrix}.$$

ここで, K は $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ のグラム行列である. すなわち K の (i, j) 要素は $(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$ である. このとき, $\mathbf{x} = (-1, 0, 1)^T$ のノルム $\|\mathbf{x}\|$ を計算せよ.

問 C 実空間を考え, 内積は標準内積 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ で与えられているとする.

- (1) 平面 $W = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$ への射影行列 P_W を求めよ.
- (2) 点 $(1, 4, 6)^T$ に一番近い平面 W 上の点を求めよ. ここで W は (1) で定義した平面である.

問 D

- (1) 実空間で標準内積を考える. このとき射影行列 P はべき等 ($P^2 = P$) であることを示せ.
- (2) 実空間で標準内積を考える. このとき直線 $\mathbf{x} = t\mathbf{a}$ への射影行列を求めよ.
- (3) 内積空間 V の正規直交基底を $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K\}$ とする. このとき $\mathbf{x} \in V$ に対して以下を示せ.

$$\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1)^2 + \dots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_K)^2.$$

(注意)

- 答えだけでなく, 計算や証明の過程も答案に書いてください.
- 時間内に終わらない場合は, **15:00** までに **西9号館308号室前** のフォルダに入れておいてください.