# 電磁気学第一 2018 年度 期末試験（解答例）

**1.**

(1) $D=\varepsilon_0 E+P$

(2) $\oiint_S P\cdot dS=-Q_p$ または $\nabla\cdot P=-\rho_p$

(3) (a) $\oiint_S D\cdot dS=Q$ または $\nabla\cdot D=\rho$

(b) $\oiint_S E\cdot dS=\dfrac{Q+Q_p}{\varepsilon_0}$ または $\nabla\cdot E=\dfrac{\rho+\rho_p}{\varepsilon_0}$

(4) $\nabla\cdot D=\rho$（ガウスの法則）から$\nabla\cdot D=\nabla\cdot(\varepsilon E)=\varepsilon\nabla\cdot E=\rho$

$\nabla\times E=0$（電界が保存界）から$E=-\nabla V$

この２つから $\varepsilon\nabla\cdot E=-\varepsilon\nabla\cdot(\nabla V)=\rho$ したがって $\nabla^2 V=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$

(5) $\nabla\cdot i=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

(6) $i=\sigma E$

**2.**

(1) ガウスの法則から

$$D = \begin{cases} 0 & (r<a,\ c<r) \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & (a \le r \le c) \end{cases}$$

$D = \varepsilon E$ より

$$E = \begin{cases} 0 & (r<a,\ c<r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} & (a \le r \le b) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} & (b \le r \le c) \end{cases}$$

(2) ガウスの法則で、$r=a$ を含む閉曲面の厚さを0とする極限操作を行い、

$$4\pi a^2 E_1 = \frac{Q+Q_a}{\varepsilon_0} \ \rightarrow\ 4\pi a^2 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 a^2} = \frac{Q+Q_a}{\varepsilon_0} \ \rightarrow\ Q_a = -\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)Q$$

同様に $r=b$ で、$4\pi b^2(-E_1+E_2) = \dfrac{Q_b}{\varepsilon_0} \ \rightarrow\ 4\pi b^2\left(-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 b^2}+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 b^2}\right) = \dfrac{Q_b}{\varepsilon_0} \rightarrow Q_b = \left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)Q$

同様に $r=c$ で、$4\pi c^2(-E_2) = \dfrac{Q_c-Q}{\varepsilon_0} \ \rightarrow\ 4\pi c^2\left(-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 c^2}\right) = \dfrac{Q_c-Q}{\varepsilon_0} \ \rightarrow\ Q_c = \left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)Q$

(3) 導体間の電位差は $V = -\displaystyle\int_c^a E dr = -\int_c^b E dr - \int_b^a E dr = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]$

よって静電容量は $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{4\pi}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)}$

(4)

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\right]$$

(5)

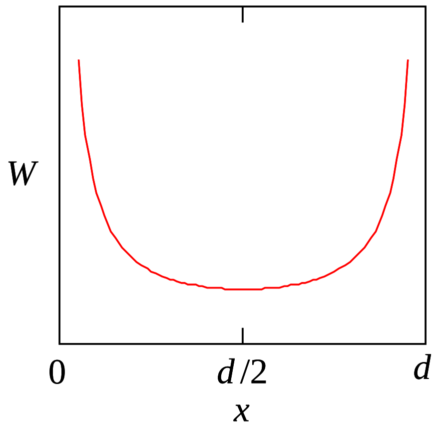
$C$ の式において、$\varepsilon_1 \rightarrow \sigma_1 = \dfrac{1}{\rho_1}$ および $\varepsilon_2 \rightarrow \sigma_2 = \dfrac{1}{\rho_2}$ として $C \rightarrow G = \dfrac{1}{R}$ とすればよい。

$$R = \frac{\rho_1\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)+\rho_2\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)}{4\pi}$$

**3.**

(1) $C = C_{\mathrm{AB}} + C_{\mathrm{BC}} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{x} + \dfrac{\varepsilon_0 S}{d - x}$ より

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) = \frac{\varepsilon_0 V^2 S d}{2}\frac{1}{x(d-x)}$$




(2) $F = +\left.\dfrac{\partial W}{\partial x}\right|_{V=一定} = \dfrac{\varepsilon_0 V^2 S d}{2}\dfrac{2x - d}{\{x(d-x)\}^2}$

(3) (2)で $F = 0$ となるのは $x = \dfrac{d}{2}$ の位置（AC 間の中点）

(4) 安定な点ではない

理由： $x > \dfrac{d}{2}$ のとき $F > 0$ （$x$ が増加する方向）

$x < \dfrac{d}{2}$ のとき $F < 0$ （$x$ が減少する方向）

となるので、わずかなずれに対して、ずれを大きくする方向に力がはたらくため、元に戻らない。

**4.**

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{12}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases}$$

(1) $Q = Q_1 = -Q_2$、 $V = V_1 - V_2$ とすると、 $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$

(2) 上記電位行列の第 2 式から $0 = p_{12}Q + p_{22}(-Q)$ 、したがって $p_{12} = p_{22}$

(3) 接続後の導体 1,2 の電荷と電位に対して
$Q_1 + Q_2 = Q$ および $V_1 = V_2$ がなりたつので

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}(Q - Q_1) \\ V_1 = p_{12}Q_1 + p_{22}(Q - Q_1) \end{cases}$$

したがって $p_{11}Q_1 + p_{12}(Q - Q_1) = p_{12}Q_1 + p_{22}(Q - Q_1)$ → $Q_1 = \dfrac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}} Q$

これに(2)の結果を代入すれば $Q_1 = 0$ したがって $Q_2 = Q$ となり
電荷がすべて導体 1 から 2 に移動している。

(4) 内導体（導体 1）と外導体（導体 2）のそれぞれに電荷 $Q_1$ と $Q_2$ を与えると、$r = b$（外導体の内側表面）には $-Q_1$、$r = c$（外導体の外側表面）には $Q_1 + Q_2$ の電荷が現れる。
このとき、導体 2 の電位は $V_2 = \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c}$ となり、$p_{12} = p_{22} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$