2018-5-7

電磁気学Ⅰ　2018 年度 中間試験（解答例）

浅田、小寺

配点(100 点満点)

1 (28)
(a) 7
(b) 7
(c) 7
(d) 7

2 (30)
(a) 6
(b) 6
(c) 6
(d) 6
(e) 6

3 (23)
(a) 8
(b) 7
(c) 8

4 (19)
(a) 7
(b) 7
(c) 5

1.

(a)

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ay^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(4xy\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(z\right)$$
$$=4x+1$$

(b)

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ ay^2 & 4xy & z\end{vmatrix}$$
$$=\boldsymbol{i}(0-0)+\boldsymbol{j}(0-0)+\boldsymbol{k}(4y-2ay)=2(2-a)y\boldsymbol{k}$$

(c)

保存界は$\nabla\times\mathbf{A}=0$であるから、(b)より $a=2$

(d)

保存界であるから積分値は経路によらない。そこで簡単なものとして、A 点から z 軸に沿って原点 O まで行き（C1)、次に、原点 O から x 軸に沿って B 点まで行く（C2）経路を選ぶ。

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{dl}=\int_{\mathrm{C1}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{dl}+\int_{\mathrm{C2}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{dl}=\int_2^0 zdz+\int_0^1 0dx=\left[\frac{z^2}{2}\right]_2^0=-2$$

2.

(a)

$$\oiint_S E\cdot dS=\iiint_V\frac{\rho}{\varepsilon_0}dv$$

任意の閉曲面上で外へ出る電界を積分した値は、その閉曲面内にある電荷の総量を真空の誘電率で割った値に等しい。

(b)

ガウスの定理 $\oiint_S E\cdot dS=\iiint_V divEdv$ から　$divE=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$　（導出説明はなくても可）

(c)

$$\oint_C E \cdot dl = 0$$

任意の閉曲線に沿った電界の線積分は０。

（2 点を結ぶ経路に沿った電界の積分の値は、経路によらない。）

(d)

ストークスの定理 $\oint_c E \cdot dl = \iint_S curl E \cdot dS$ から　$curl E = 0$（導出説明はなくても可）

(e)

(d)から $E = -gradV$ により電位 V が定義できる。これを(b)に代入して

$div(-gradV) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$　したがって　$\nabla^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

3.

(a)

対称性により、電界 $\mathbf{E}$ は r 成分のみ有し、ϕ の方向に依らず一様である。単位長の円筒にガウスの法則

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv$$

を適用して、$\mathbf{E}$ の r 成分 E_r は次のように求まる。

(i) $0 \le r \le a$ のとき

$$2\pi r E_r = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \pi r^2$$

$$\therefore E_r = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

(ii) $a \le r \le b$ のとき

$$2\pi r E_r = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \pi a^2$$

$$\therefore E_r = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}$$

(iii) $b \le r \le c$ のとき

導体内では電界は 0 より、$\mathbf{E} = 0$

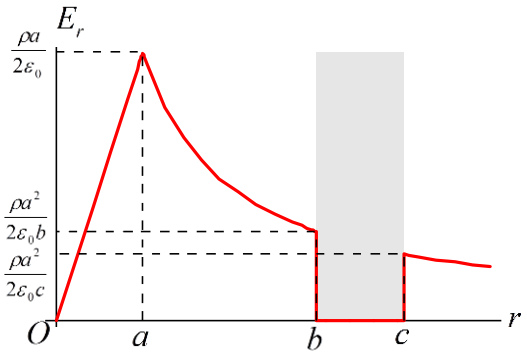
(iv) $c \le r$ のとき

$$2\pi r E_r = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\pi a^2$$

$$\therefore E_r = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}$$

まとめると、

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0} & (0 \le r < a) \\ \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} & (a \le r < b) \\ 0 & (b \le r < c) \\ \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} & (c \le r) \end{cases}$$



(b)

ガウスの法則より、

(i) $r = b$ のとき、

$$\sigma = \varepsilon_0(-E_r) = -\frac{\rho a^2}{2b}$$

（別解：ガウスの法則より、$r = b$ の内側表面には単位長あたり $-\pi a^2 \rho$ $[C]$ の電荷がはりついていることになる。これを円筒の面積 $2\pi b$ で割ると $\sigma = -\rho a^2/(2b)$）

(ii) $r = c$ のとき、

$$\sigma = \varepsilon_0 E_r = \frac{\rho a^2}{2c}$$

(c)

各領域ごとに(a)で求めた電界を積分する。r = c において $V = 0$ であるので c を基準にして計算する。

(iv) $c \le r$ のとき

$$V = -\int_c^r E_r dr = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\int_c^r \frac{1}{r} dr = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln r\right]_c^r = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln r + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln c = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{c}{r}\right)$$

(iii) $b \le r \le c$ のとき

$$V = -\int_c^r E_r dr = -\int_c^r 0 dr = 0$$

(ii) $a \le r \le b$ のとき

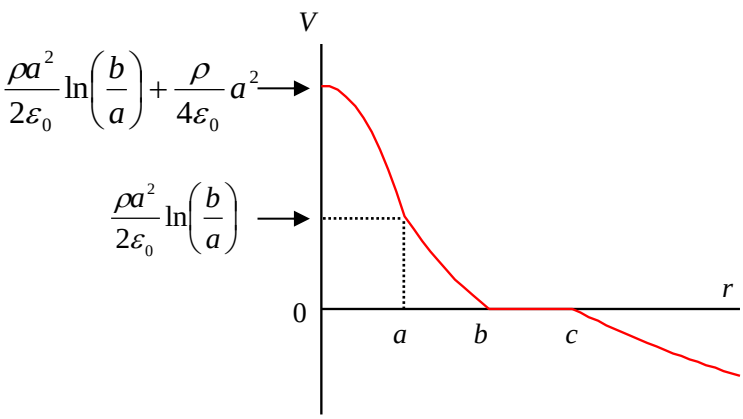
$$
\begin{aligned}
V &= -\int_c^r E_r dr = -\int_c^b E_r dr - \int_b^r E_r dr \\
&= 0 - \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\int_b^r \frac{1}{r} dr \\
&= -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln r\right]_b^r \\
&= \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{r}\right)
\end{aligned}
$$

(i) $0 \le r \le a$ のとき

$$
\begin{aligned}
V &= -\int_c^r E_r dr = -\int_c^b E_r dr - \int_b^a E_r dr - \int_a^r E_r dr \\
&= 0 + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_a^r r dr \\
&= \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^r \\
&= \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\rho}{4\varepsilon_0}a^2 - \frac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2
\end{aligned}
$$

まとめると

$$
V = \begin{cases}
\dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) + \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}a^2 - \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2 & (0 \le r < a) \\
\dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{b}{r}\right) & (a \le r < b) \\
0 & (b \le r < c) \\
\dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{c}{r}\right) & (c \le r)
\end{cases}
$$



4.

(a)

$-d/2 \le x \le d/2$ では、ポアソンの方程式 $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ を積分して

$$V(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + Ax + B \quad (A \text{ と } B \text{ は積分定数})$$

$V(0) = 0$ より $B = 0$、また、x について対称であるから $V(-x) = V(x)$、したがって $A = 0$

これらから

$$V(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2, \quad E(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x$$

(b)

$x \le -d/2$ では、

$$V(x) = Cx + D, \quad E(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = -C \quad (C \text{ と } D \text{ は積分定数})$$

$x = -d/2$ で $V(x)$ と $E(x)$ が連続であることから $C = \rho d/(2\varepsilon_0)$, $D = \rho d^2/(8\varepsilon_0)$

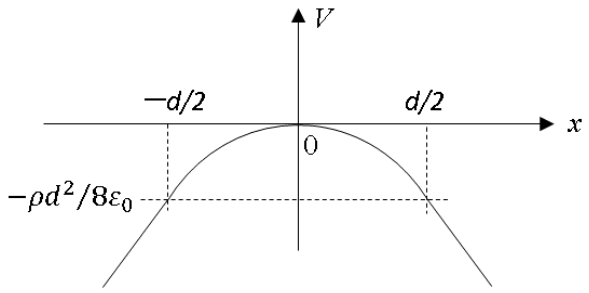
これらから

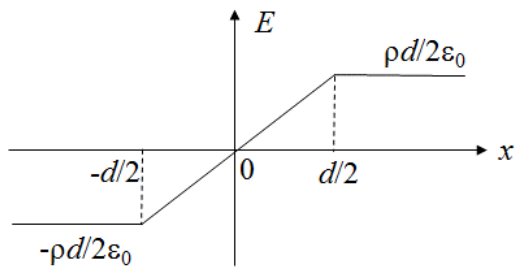
$$V(x) = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}x + \frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0}, \quad E(x) = -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

$d/2 \le x$ でも同様に

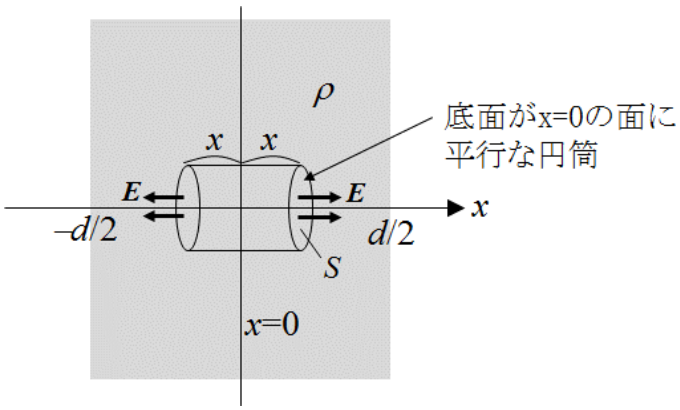
$$V(x) = -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}x + \frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0}, \quad E(x) = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

(c)





(別解)



右図のような円筒の閉曲面を置いて、
ガウスの法則を用いると

$0 \le x \le d/2$ では

$$2ES = \frac{\rho}{\varepsilon_0} 2xS \quad \text{から} \; E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x$$

$d/2 \le x$ では

$$2ES = \frac{\rho}{\varepsilon_0} dS \quad \text{から} \; E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{d}{2}$$

$x \le 0$ では E の大きさは $x \ge 0$ と同じで方向が反対になる。

電位は

$V(x) = -\int_0^x E(x)dx$ から求められる。