

電磁気学第一 演習 第14回 解答

56. 直径 d , 長さ l の導電率 σ の導線の抵抗を求めよ。具体的な値として、直径 0.5[mm], 長さ 10[m] の銅線の抵抗を求めよ。ただし、銅の導電率は 5.8×10^7 [S/m] とする。

【解答】

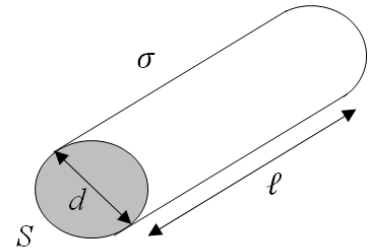
両端の電圧: $V = El$

電流: $I = \sigma ES$ (ただし、 S は抵抗体の断面積)

$$R = \frac{V}{I} = \frac{El}{\sigma ES} = \frac{l}{\sigma S}$$

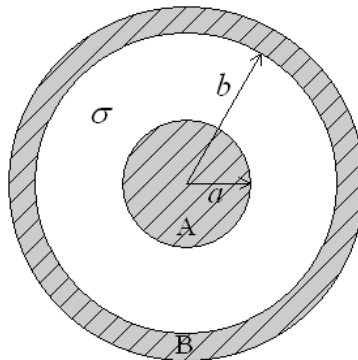
ここで、 $S = \pi(d/2)^2$ より、

$$R = \frac{l}{\sigma \pi (d/2)^2} = \frac{4l}{\pi \sigma d^2}$$



$d = 0.0005$ [m], $l = 10$ [m], $\sigma = 5.8 \times 10^7$ [S/m] を代入すると、
 $R \cong 0.878$ [Ω]

58. 内導体 A の半径 a , 外導体 B の内側までの半径 b の円筒導体 A, B の間に導電率 σ の物質がつまっている。この導電率は A, B の導電率より十分小さいとする。円筒の軸方向の長さを l として、A, B 間の抵抗 R を求めよ。まず、導電率 σ の媒質を誘電率 ϵ の誘電体に置き換え容量を計算し、C と G の類似性から求める。



【解答】

C と G の類似性 (アナロジー, analogy) を使うと知っている知識を使えるので計算が簡単である。まず、導電率 σ の媒質が誘電率 ϵ の誘電体だったとして C を計算する。A が単位長

あたり λ [C/m] の線電荷密度に帯電しているとする、ガウスの定理と対称性より、

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV$$

$$2\pi r l \varepsilon E_r = \lambda l$$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon r}$$

よって、

$$V = -\int_b^a E_r dr = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon} \int_b^a \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon} [\ln r]_b^a = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon} (\ln a - \ln b) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon} \ln \frac{b}{a}$$

長さ l 辺りの容量は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda l}{V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln \frac{b}{a}}$$

さて、 C と G のアナロジーより、 $\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ から G を計算すると ($G = \frac{\sigma}{\varepsilon} C$ と計算すればいい

のだが、簡単に言うと上の式で、 $C \rightarrow G$, $\varepsilon \rightarrow \sigma$ と書き換えてしまえばいいということである) 、

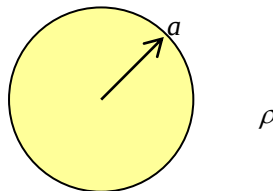
$$G = \frac{2\pi \sigma l}{\ln \frac{b}{a}}$$

よって、

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi \sigma l} \ln \frac{b}{a}$$

■

58' 抵抗率 ρ の無限に広い媒質中に半径 a の導体球がある。導体球と無限遠の間の抵抗を求めよ。導体球の抵抗率は 0 とする。(静電容量とコンダクタンスの類似性より、まず容量を求め、その後 $C \rightarrow G$, $\varepsilon \rightarrow \sigma = 1/\rho$ と置き換える。)



【解答】

誘電率 ε の無限に広い媒質中におかれた半径 a の導体球の静電容量は、

$$C = 4\pi \varepsilon a$$

となる。したがって、静電容量とコンダクタンスの類似性より、 $C \rightarrow G$, $\varepsilon \rightarrow \sigma = 1/\rho$ と

置き換えればよいので、

$$G = 4\pi\sigma a = \frac{4\pi a}{\rho}$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\rho}{4\pi a}$$

■