電磁気学第一　演習 第２回　解答

【VA-17】3つの座標平面および3つの平面 $x=1, y=1, z=1$ で囲まれた立方体がある。その立方体の各面に関する $\mathbf{A}=(x^2+xy-y^2)\hat{\mathbf{x}}+2xy\hat{\mathbf{y}}+(y^2-xy)\hat{\mathbf{z}}$ の法線面積分の値とその和を求めよ。ただし、面素ベクトルは外側を向いているとする。

<u>解答</u>

平面 $x=0$

$$\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\mathbf{A}\Big|_{x=0}\cdot(-\hat{x})dydz=\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(y^2)dydz=\int_{y=0}^{1}y^2dy\int_{z=0}^{1}dz=\frac{1}{3}$$

平面 $x=1$

$$\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\mathbf{A}\Big|_{x=1}\cdot\hat{x}dydz=\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(1+y-y^2)dydz=\left[y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{7}{6}$$

平面 $y=0$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\mathbf{A}\Big|_{y=0}\cdot(-\hat{y})dydz=\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}0dxdz=0$$

平面 $y=1$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\mathbf{A}\Big|_{y=1}\cdot\hat{y}dxdz=\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}2xdxdz=\left[x^2\right]_0^1=1$$

平面 $z=0$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\mathbf{A}\Big|_{z=0}\cdot(-\hat{z})dxdy=-\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(y^2-xy)dxdy=-\int_{y=0}^{1}\left[y^2x-\frac{x^2y}{2}\right]_{x=0}^{1}dy=-\int_{y=0}^{1}\left(y^2-\frac{y}{2}\right)dy$$

$$=-\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{4}\right]_0^1=-\frac{1}{12}$$

平面 $z=1$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\mathbf{A}\Big|_{z=1}\cdot\hat{z}dydz=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(y^2-xy)dxdy=\int_{y=0}^{1}\left[y^2x-\frac{x^2y}{2}\right]_{x=0}^{1}dy=\int_{y=0}^{1}\left(y^2-\frac{y}{2}\right)dy$$

$$=\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{4}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

よって、　$\oint\!\!\!\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\frac{5}{2}$

【VA-19’】 $\mathbf{F} = x^2 z\hat{\mathbf{x}} + y^2 z\hat{\mathbf{y}} + xyz\hat{\mathbf{z}}$ について $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ を求めよ。SはFig.19’のようにz軸上に中心があり，xy面に平行で $z=4$、$0 \le \varphi \le \pi/2$、半径2の扇型である。+z方向を面の正の向きとする。

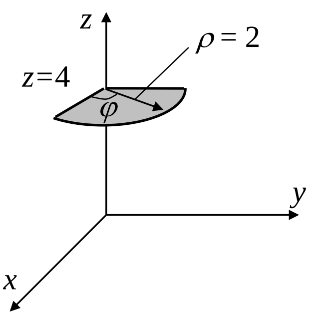

Fig. 19’

解答

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \mathbf{F}\big|_{z=4} \cdot \hat{z}\rho d\rho d\varphi = 4\int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \rho^3 \sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi = 2\int_{\rho=0}^{2}\rho^3 d\rho = 8$$

【VA-20】ベクトル場 $\mathbf{F} = r^2(\sin\theta\hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\theta\hat{\varphi})$ について，$r=1, 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \varphi \le 2\pi$ で定義される閉曲面から出るフラックス（ベクトル場の法線面積分）を求めよ。ただし、閉曲面は上側の半球とxy平面から構成される。

解答

上側の半球S_1上では$r=1$より面積素は

$$d\mathbf{S} = \sin\theta d\theta d\varphi\hat{\mathbf{r}}$$

であるから

$$\int_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\ d\varphi\ d\theta = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \pi\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}$$

下側の平面S_2上では$\theta = \dfrac{\pi}{2}$より面積素は

$$d\mathbf{S} = r\ \ d r\ d\varphi\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

であるから

$$\int_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr = 2\pi\int_0^1 r^3 dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

よって求める値は$\dfrac{\pi^2+\pi}{2}$

【VA-24】半径aの球が原点を中心に置かれている。球の密度が$\dfrac{1}{a^4}(a-r)$で表されるとき、

球の重さを求めよ。

<u>解答</u>

密度を$\rho(r) = \dfrac{1}{a^4}(a-r)$とすると、球の重さは次の体積積分で求められる。

$$\begin{aligned}
\iiint_V \rho dv &= \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{a^4}(a-r)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{a^4}\int_{r=0}^{a}(ar^2 - r^3)dr\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{1}{a^4}\left[\frac{ar^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{a^4}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right)\cdot 2\cdot 2\pi \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$