

電磁気学第一 演習 第1回 解答

【VA-3】 $f(x, y, z) = yz^2 + zx + xy^2$ について、以下の経路での線積分を求めよ。

(1) OからB(2, 0, 0), C(2, 3, 0) を経てA(2, 3, 4)に至る折れ線

(2) 原点OからAまでの線分

(線分OAのパラメータ表示、 $x = 2t, y = 3t, z = 4t(0 \leq t \leq 1)$ を利用せよ)

解答

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_{O \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A} f(x, y, z) dl &= \int_{O \rightarrow B} f(x, y, z) dl + \int_{B \rightarrow C} f(x, y, z) dl + \int_{C \rightarrow A} f(x, y, z) dl \\
 &= \int_{x=0}^2 f(x, y, z) \Big|_{y=z=0} dx + \int_{y=0}^3 f(x, y, z) \Big|_{x=2, z=0} dy + \int_{z=0}^4 f(x, y, z) \Big|_{x=2, y=3} dz \\
 &= \int_{x=0}^2 0 dx + \int_{y=0}^3 2y^2 dy + \int_{z=0}^4 (3z^2 + 2z + 18) dz \\
 &= 0 + \left[\frac{2y^3}{3} \right]_0^3 + \left[\frac{3z^3}{3} + \frac{2z^2}{2} + 18z \right]_0^4 \\
 &= 0 + 18 + 64 + 16 + 72 \\
 &= 170
 \end{aligned}$$

(2)

線分OAをパラメータ表示すると、 $x = 2t, y = 3t, z = 4t(0 \leq t \leq 1)$ 。

$$f(x, y, z) = yz^2 + zx + xy^2 = (3t)(4t)^2 + (4t)(2t) + (2t)(3t)^2 = 66t^3 + 8t^2$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} dt = \sqrt{29} dt$$

$$\int_{O \rightarrow A} f(x, y, z) dl = \int_{t=0}^1 (66t^3 + 8t^2) \sqrt{29} dt = \sqrt{29} \left[\frac{66}{4} t^4 + \frac{8}{3} t^3 \right]_0^1 = \sqrt{29} \left(\frac{33}{2} + \frac{8}{3} \right) = \frac{115}{6} \sqrt{29}$$

別解

$$\begin{aligned}
\int_{O \rightarrow A} f(x, y, z) dl &= \int_{O \rightarrow A} \{f(x, y, z) \hat{l}\} \cdot d\mathbf{l} \\
&= \int_{O \rightarrow A} \left\{ f(x, y, z) \frac{\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \right\} \cdot (\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz) \\
&= \int_{O \rightarrow A} f(x, y, z) \left\{ \frac{dx^2}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} + \frac{dy^2}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} + \frac{dz^2}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \right\} \\
&= \int_{O \rightarrow A} f(x, y, z) \left\{ \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} + \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} + \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} \right\}
\end{aligned}$$

ここで、直線は $x = 2t, y = 3t, z = 4t (0 \leq t \leq 1)$ なので、

$$\begin{aligned}
&= \int_{x=0}^2 f(x, y, z) \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} + \int_{y=0}^3 f(x, y, z) \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} + \int_{z=0}^4 f(x, y, z) \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} \\
&= \int_{x=0}^2 f(x, 3x/2, 2x) \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2}} + \int_{y=0}^3 f(2y/3, y, 4y/3) \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} + \int_{z=0}^4 f(z/2, 3z/4, z) \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}} \\
&= \frac{115}{6} \sqrt{29}
\end{aligned}$$

【VA-11】 以下のような円筒座標系において、 $(3, 0, 0)$ から $(3, \frac{\pi}{2}, 0)$ までFig.11の経路に沿って接線線積分せよ。

$$\int_C (\sin \varphi \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} + \tan \varphi \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot d\mathbf{l}$$

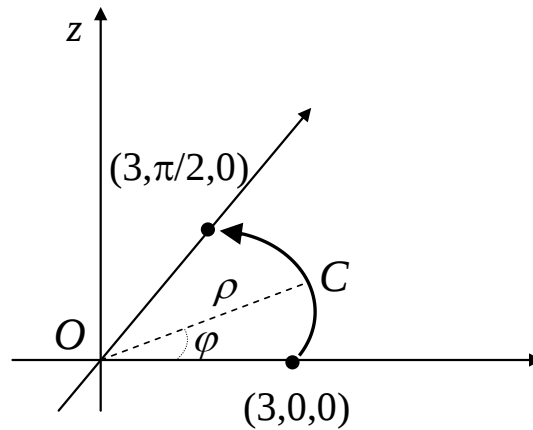


Fig. 11

解答

経路は円弧なので、円筒座標（あるいは球座標）を用いると簡単である。ここでは円筒座標を用いる。円筒座標系の線素は $d\mathbf{l} = \hat{\boldsymbol{\rho}}d\rho + \hat{\boldsymbol{\phi}}\rho d\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}dz$ であり、また、経路 C は円弧で半径は一定、 z 方向の変化は無いいため、 $C: \rho = 3, d\rho = 0, dz = 0,$

$$\begin{aligned} & \int_C (\sin \varphi \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} + \tan \varphi \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} (\sin \varphi \hat{\boldsymbol{\rho}} + 3 \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} + \tan \varphi \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot 0 + \hat{\boldsymbol{\phi}} 3 d\varphi + \hat{\boldsymbol{z}} \cdot 0) \\ &= 9 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 9 [\sin \varphi]_0^{\pi/2} = 9 \end{aligned}$$