交流回路
－共振回路－

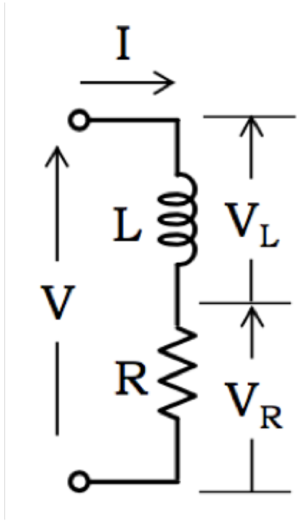
電気電子系　エネルギーコース

山田　明

ベクトル図

- インピーダンスとアドミッタンスをまとめてイミタンスと呼ぶ。

RL回路の位相関係を図（ベクトル図）で表現する。電流基準。



$\boldsymbol{V_L} = j\omega L\boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{V_R} = R\boldsymbol{I}$

全電圧$\boldsymbol{V}$は，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_R} + \boldsymbol{V_L} = R\boldsymbol{I} + j\omega L\boldsymbol{I} = (R + j\omega L)\boldsymbol{I} = Z\boldsymbol{I}$となる。

$$Z = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}e^{j\phi}, \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

ベクトル図で表現すると，

$\boldsymbol{I}$（基準）

演習問題1

ある負荷に対し、図 1 に示すように $C = 160\ \mu\mathrm{F}$ の進相コンデンサを挿入し、50Hz の周波数で 20V の正弦波を印加した所、端子 1-1'間を流れる電流は 1 A となった。以下の問に答えよ。

(1) 負荷のアドミッタンス Y を求めよ。また、サセプタンスは誘導性・容量性のどちらであるかを示せ。

(2) この負荷の等価回路が抵抗一個とインダクタ一個で表されると仮定する。抵抗とインダクタの値を求め、等価回路を示せ。

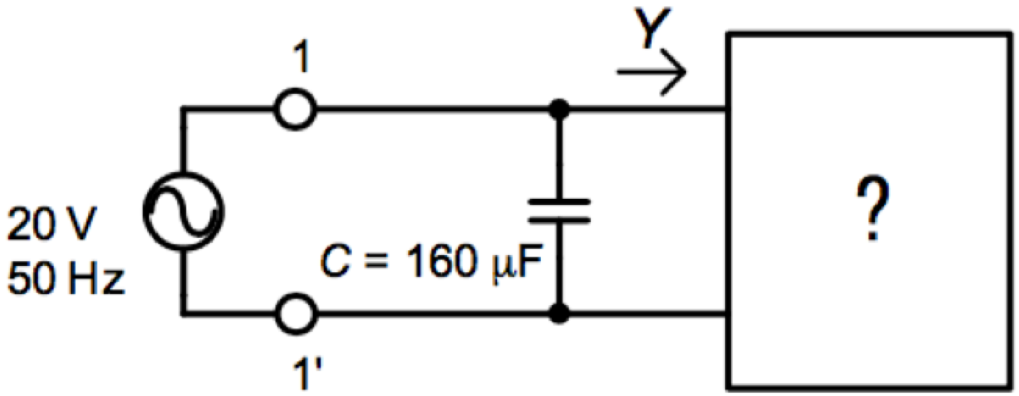


図 1

解答1

(1) 進相コンデンサ込みのアドミッタンスY_{total}について、

$$Y_{total} = \frac{I}{V} = \frac{1}{20}\,\mathrm{S}$$

負荷のアドミッタンスYは、

$$Y = Y_{total} - j\omega C = \frac{1}{20} - j\left(2\pi \times 50 \times 160 \times 10^{-6}\right) = 0.05 - j0.05$$

サセプタンスは負であるから、誘導性サセプタンスである。

(2) 誘導性の負荷であることから、抵抗とインダクタの直列回路と考えられる。したがって、

$$Z = R + j\omega L$$

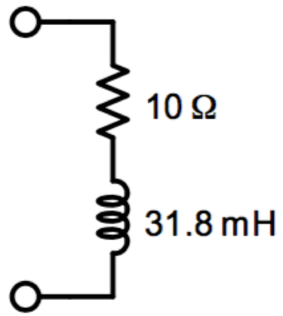
である。ところで、(1)の結果より、

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{0.05}\cdot\frac{1}{1-j} = 10\cdot(1+j) = 10 + j10\,\Omega$$

、抵抗値とインダクタの値は次のようになる。

$$R = 10\,\Omega$$

$$L = \frac{10}{2\pi \times 50} = 31.8\,\mathrm{mH}$$



演習問題2

ある負荷に対し，50Hzの周波数で20Vの正弦波を印加したところ，負荷に$1-j\sqrt{3}$Aの電流が流れ込んだ。以下の問に答えよ。

1. この時の負荷のアドミッタンスYを求めよ。また，サセプタンスは誘導性・容量性のどちらであるかを示せ。
2. この負荷の等価回路が抵抗一個とインダクター個の直列で表されるとする。抵抗とインダクタの値を求めよ。

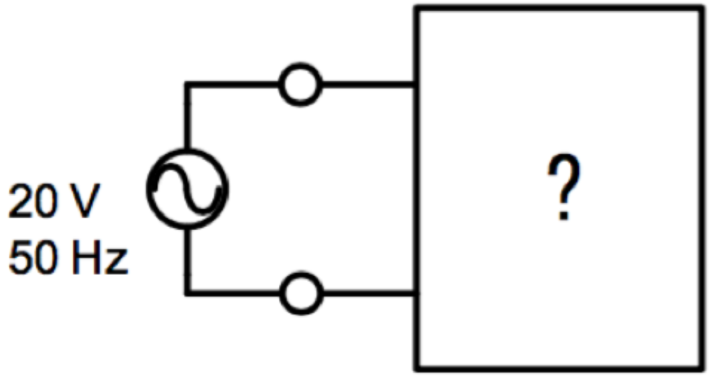


図 1

解答2

(1) $VY = I$ より、

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{1 - j\sqrt{3}}{20}\,\mathrm{S}$$

サセプタンスは負であるから、誘導性サセプタンスである。

(2) 誘導性の負荷であることから、抵抗とインダクタの直列回路と考えられる。したがって、

$$Z = R + j\omega L$$

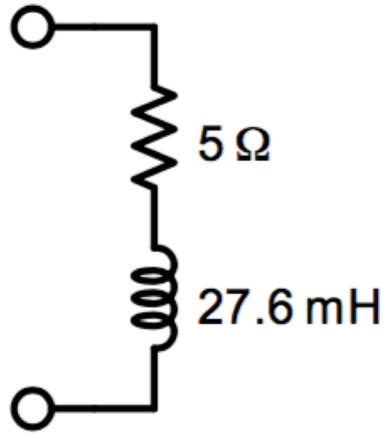
である。ところで、(1)の結果より、

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{20}{1 - j\sqrt{3}} = \frac{20 \cdot \left(1 + j\sqrt{3}\right)}{1 + 3} = 5 + j5\sqrt{3}\,\Omega$$

であるから、抵抗値とインダクタの値は次のようになる。

$$R = 5\,\Omega$$

$$L = \frac{5\sqrt{3}}{2\pi \times 50} = 27.6\,\mathrm{mH}$$



内容

- 前回の復習
  - インピーダンスとアドミッタンス
- 共振回路
  - 無損失LC直列共振回路
  - 無損失LC並列共振回路
- 損失を含む共振回路
  - 共振の良さ:Q値
- 直列共振回路のアドミッタンス
  - ポールとゼロ

前回の復習

- 素子特性を複素数まで拡張したものを，インピーダンス（Z）及びアドッミタンス（Y）と呼ぶ。

抵抗　→　インピーダンス（Z）

コンダクタンス　→　アドミッタンス（Y）

$$\boldsymbol{V_R} = \boxed{R}\ \boldsymbol{I_R}$$

$$\boldsymbol{V_C} = \boxed{\frac{1}{j\omega C}}\ \boldsymbol{I_C}$$

$$\boldsymbol{V_L} = \boxed{j\omega L}\ \boldsymbol{I_L}$$

インピーダンス（Z）

$$\boldsymbol{I_R} = \boxed{\frac{1}{R}}\ \boldsymbol{V_R}$$

$$\boldsymbol{I_C} = \boxed{j\omega C}\ \boldsymbol{V_C}$$

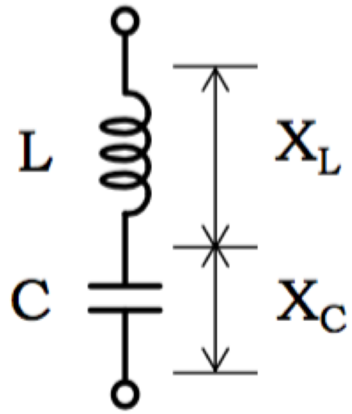
$$\boldsymbol{I_L} = \boxed{\frac{1}{j\omega L}}\ \boldsymbol{V_L}$$

アドミッタンス（Y）

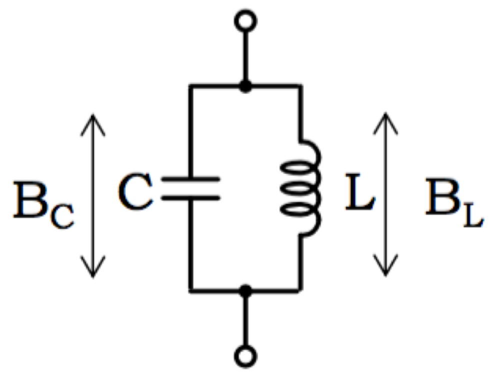
回路を解くと分かるが，電圧・電流が複素数と考えると説明した。
最終的には各素子特性が複素数であるとして振幅，位相の周波数応答を求める。

共振回路

- キャパシタとインダクタを含み，特定の周波数に強い応答を示す回路。
    - 周波数の選択や発振回路に利用されている。

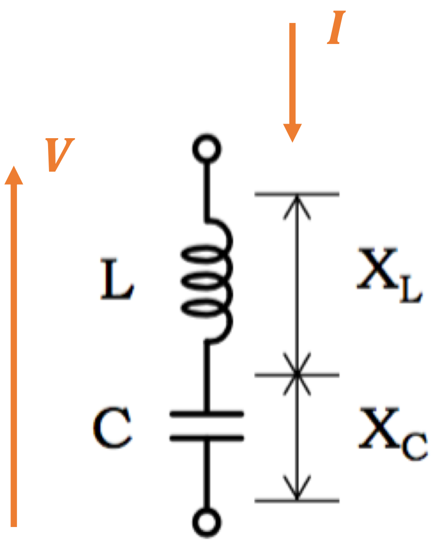


無損失直列共振回路
（無損失：抵抗成分を含まない）



無損失並列共振回路

無損失LC直列共振回路 I



$$\boldsymbol{V} = Z\boldsymbol{I}$$

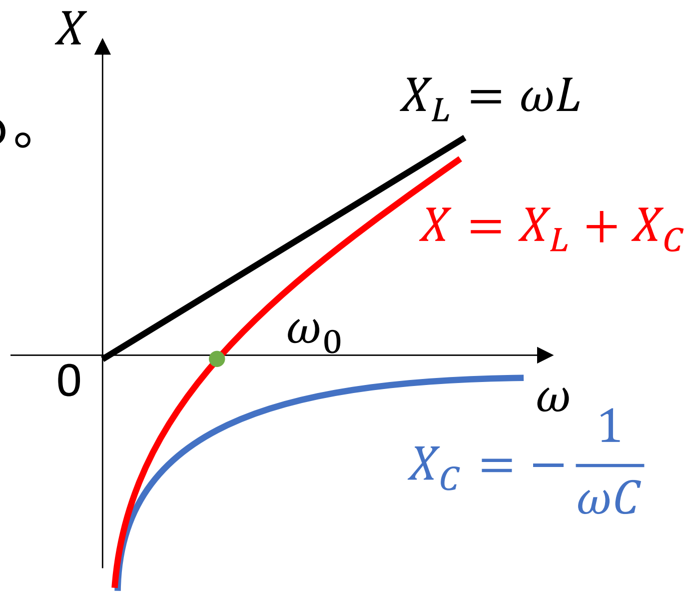
$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{Z}\boldsymbol{V}$$

直列共振：
 $Z = 0\ (Y = \infty)$の時，電圧駆動で電流は無限大となる。

- 回路のインピーダンスZを求める。

$$Z = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- リアクタンス特性を描く。
    - リアクタンス成分の周波数特性
    - インダクタ成分（X_L）
    - キャパシタ成分（X_C）
    - リアクタンス成分（$X = X_L + X_C$）



- 電圧源で駆動して，電流を出力応答とする。
- リアクタンス成分が0となる時何が起こるか？
    - リアクタンス成分が0となる時の角周波数（ω_0）を求める。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

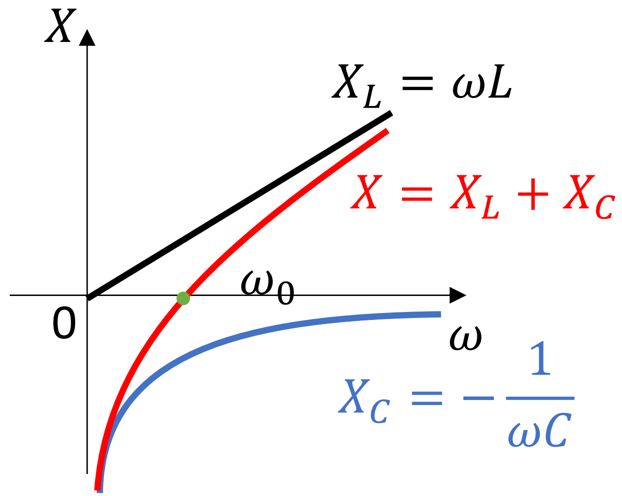
    - ω_0を用いて，インピーダンスの式を変形する。

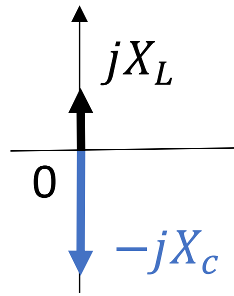
無損失LC直列共振回路 II

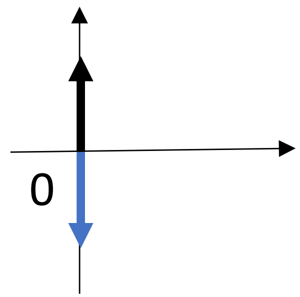
$$Z = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = j\omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

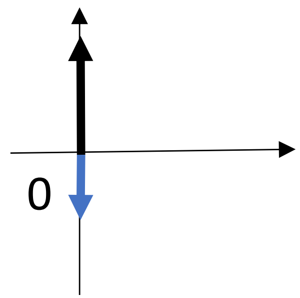
- $\omega < \omega_0$
  - リアクタンス成分(X)は負:電圧源から見て，容量性に見える。
- $\omega = \omega_0$
  - リアクタンス成分は0
- $\omega > \omega_0$
  - リアクタンス成分は正:電圧源から見て，誘導性に見える。

- エネルギー的に解釈する。
  - インダクタは磁気エネルギー，キャパシタは電気エネルギーを充放電している。
  - エネルギーを消費しない素子。電源電圧に対して，位相が$\frac{\pi}{2}$ずれているため。
  - インダクタとキャパシタの位相差は，πである。
    - 片方が充電している時は，もう片方は放電している。
- $\omega < \omega_0$
  - キャパシタ成分よりエネルギーが電圧源に戻される。
- $\omega = \omega_0$
  - キャパシタに充放電されるエネルギーとインダクタに充放電されるエネルギーが等しい。
  - 回路からの電源へのエネルギーの戻りはない。
  - 発振。
- $\omega > \omega_0$
  - インダクタ成分よりエネルギーが電圧源に戻される。

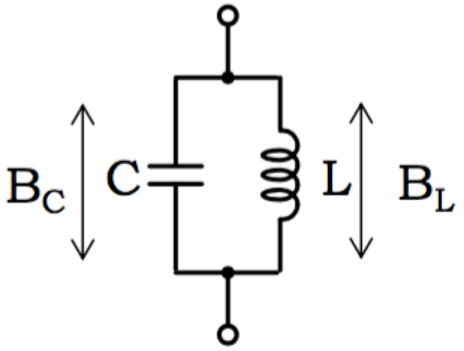








無損失LC並列共振回路



$$\boldsymbol{I} = Y\boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{Y}\boldsymbol{I}$$

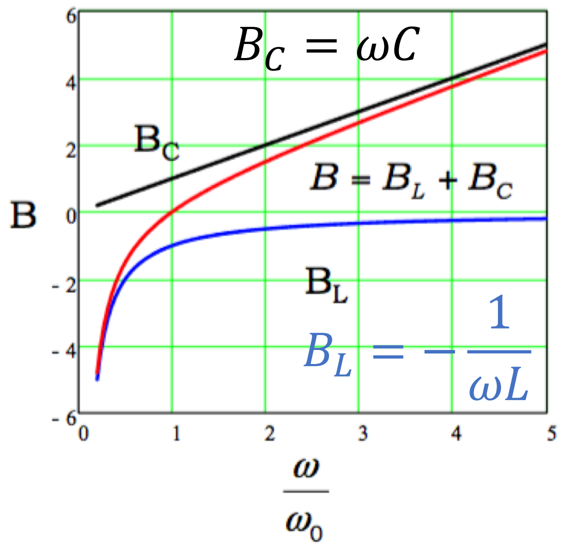
並列共振：

$Y = 0\ (Z = \infty)$の時，
電流駆動で電圧は無限大となる。

- 回路のアドミッタンスYを求める。

$$Y = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

- サセプタンス特性を描く。
  - サセプタンス成分の周波数特性
  - インダクタ成分（B_L）
  - キャパシタ成分（B_C）
  - サセプタンス成分（$B = B_L + B_C$）

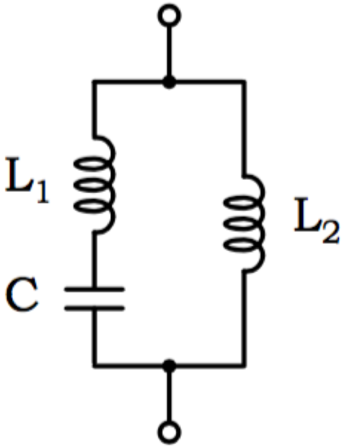


- 電流源で駆動して，電圧を出力応答とする。
- リアクタンス成分が0となる時何が起こるか？
  - リアクタンス成分が0となる時の角周波数（ω_0）を求める。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

  - ω_0を用いて，インピーダンスの式を変形する。

無損失共振回路



- インピーダンスを求める。

$R_1//R_2$は，R_1とR_2が並列という意味。

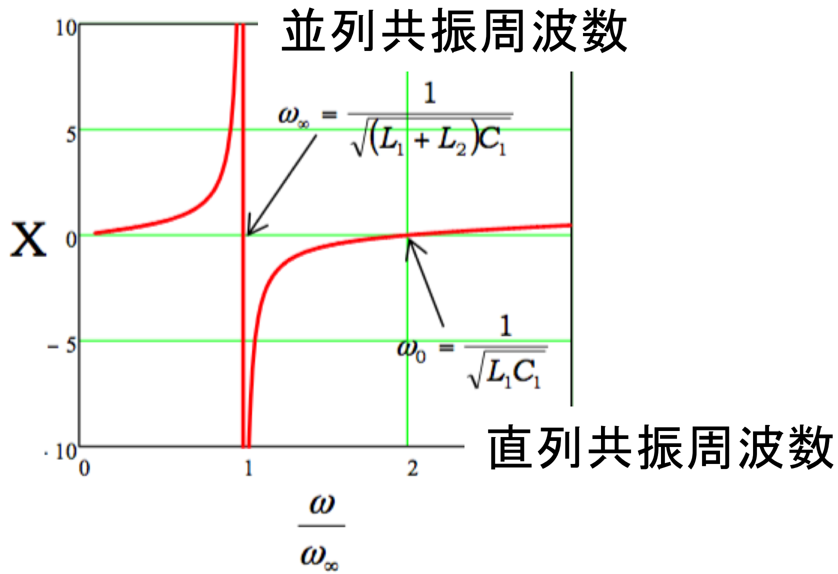
$$R_1//R_2 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

直列共振角周波数

$$Z = 0, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1C}}$$

並列共振角周波数

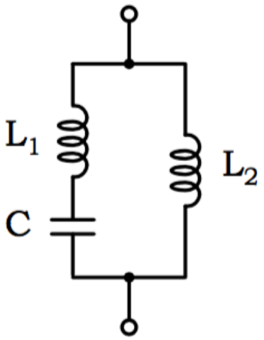
$$Z = \infty, \omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}$$



直列共振特性と並列共振特性を併せ持っている。

リアクタンス特性

電圧駆動，電流駆動



$$Z = j\frac{(1-\omega^2 L_1 C)\omega L_2}{1-\omega^2 C(L_1+L_2)}$$

直列共振角周波数: $Z = 0$ $\qquad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C}}$

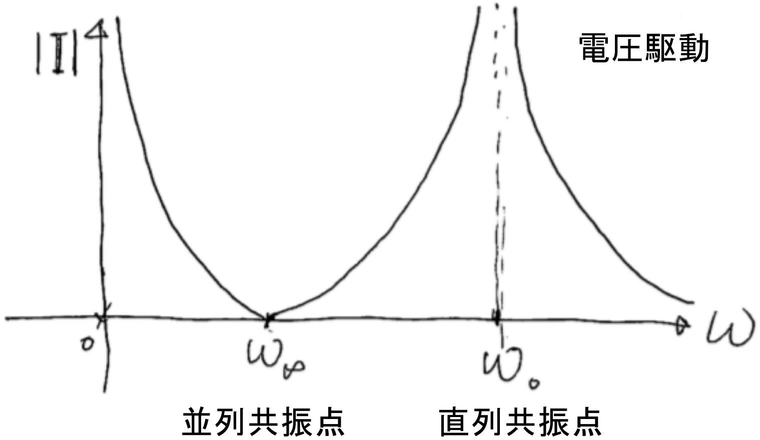
並列共振角周波数: $Z = \infty$ $\qquad \omega_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}$

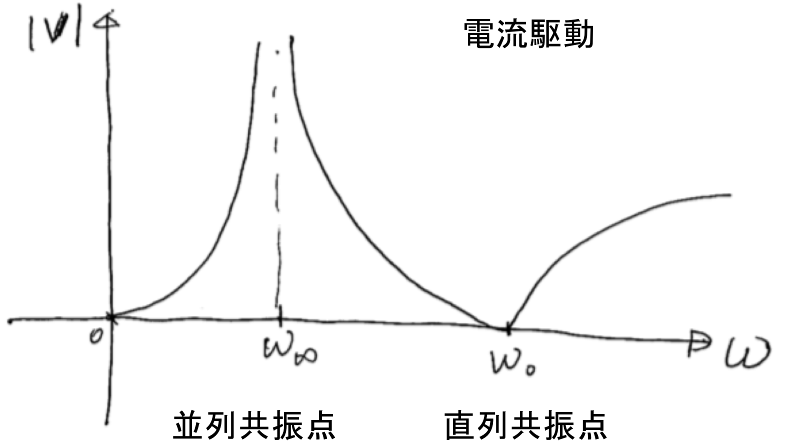
- 電圧駆動，電流応答: $\boldsymbol{I} = \frac{1}{Z}\boldsymbol{V}$より，$|\boldsymbol{I}| = \frac{1}{|z|}|\boldsymbol{V}|$

$$|\boldsymbol{I}| = \left|\frac{1-\omega^2 C(L_1+L_2)}{(1-\omega^2 L_1 C)\omega L_2}\right| |\boldsymbol{V}|$$

- 電流駆動，電圧応答: $\boldsymbol{V} = Z\boldsymbol{I}$より，$|\boldsymbol{V}| = |Z||\boldsymbol{I}|$

$$|\boldsymbol{V}| = \left|\frac{(1-\omega^2 L_1 C)\omega L_2}{1-\omega^2 C(L_1+L_2)}\right| |\boldsymbol{I}|$$





演習問題

図 1 について、リアクタンスを求め、直列及び並列共振周波数を求めよ。また、リアクタンスの周波数特性の概略を示せ。

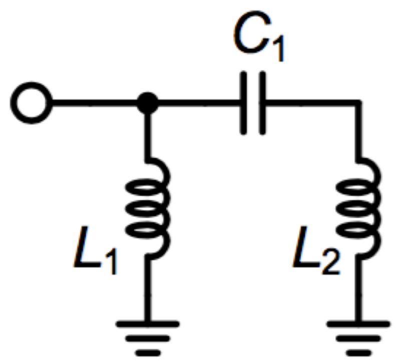
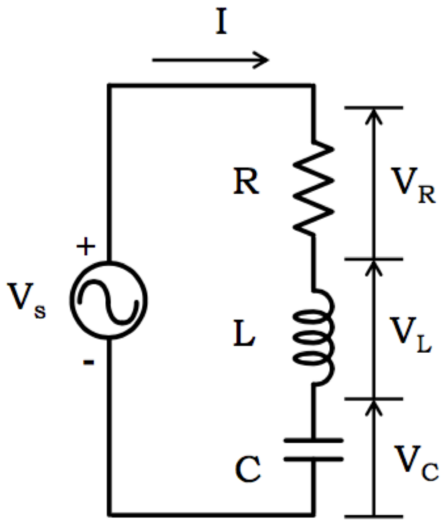


図 1

解答

損失を含む共振回路 I



インピーダンスを求めよ。

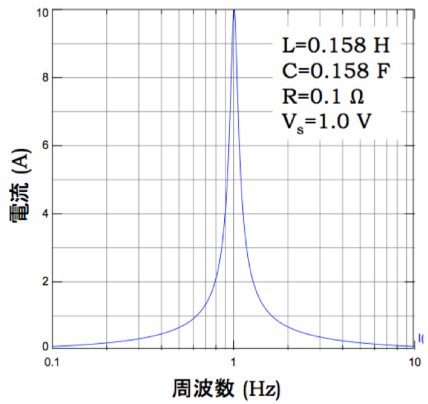
$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

電圧駆動の時，電流の大きさは，下式で与えられる。

$$|\boldsymbol{I}| = \frac{1}{|Z|}|\boldsymbol{V_s}|$$

$|Z|$を求めよ。

$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$（損失が無いときの直列共振角周波数）のとき，電流の大きさは最大値を取る。このときの周波数特性を下記に示す。



- $\omega \rightarrow 0$のとき，$\omega L \rightarrow 0$よりインダクタは短絡，$\frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty$よりキャパシタは開放に見える。
- $\omega \rightarrow \infty$のとき，インダクタは開放，キャパシタは短絡に見える。

$\omega = \omega_0$のとき電流値は最大となるが，損失の無いときと異なり有限となる。

損失を含む共振回路 II

共振点での電圧は，$Z = R$より，

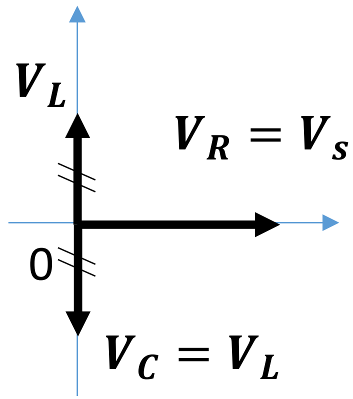
$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{R}\boldsymbol{V_s}$$

このとき，抵抗，インダクタ，キャパシタでの電圧は，

$$\boldsymbol{V_R} = R\boldsymbol{I} = \boldsymbol{V_s}$$

$$\boldsymbol{V_L} = j\omega_0 L\boldsymbol{I} = j\omega_0 L\frac{1}{R}\boldsymbol{V_s} = j\frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{R}\boldsymbol{V_s} = j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\boldsymbol{V_s}$$

$$\boldsymbol{V_C} = -j\frac{1}{\omega_0 C}\boldsymbol{I} = -j\frac{1}{\omega_0 CR}\boldsymbol{V_s} = -j\frac{\sqrt{LC}}{CR}\boldsymbol{V_s} = -j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\boldsymbol{V_s}$$



位相関係に注目すると，LとCの電圧は打消しあって，回路は純抵抗に見えている。
　↔共振点においてLとCでの充放電量が一致している。

損失を含む共振回路 III

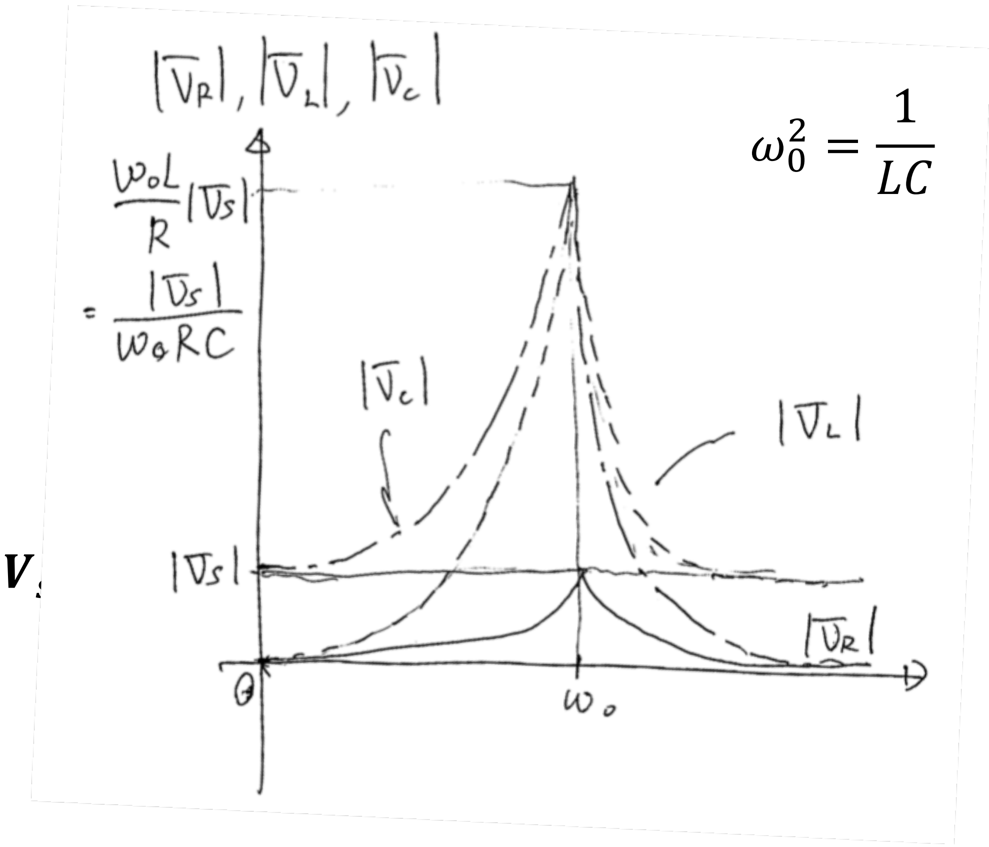
各素子の電圧の大きさ

$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{Z}\boldsymbol{V_s} \qquad Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$|\boldsymbol{V_R}| = R|\boldsymbol{I}| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}|\boldsymbol{V_s}|$$

$$|\boldsymbol{V_L}| = |j\omega L\boldsymbol{I}| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}|\boldsymbol{V_s}|$$

$$|\boldsymbol{V_C}| = \left|\frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}\right| = \frac{1}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}|\boldsymbol{V_s}|$$



$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

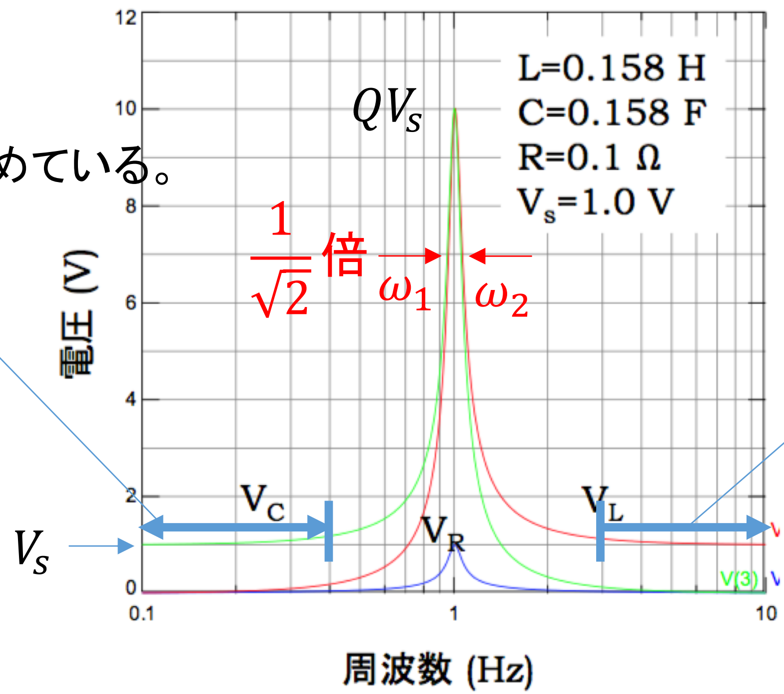
共振の良さ(Q)

$$Q = \left|\frac{V_L}{V_s}\right|_{\omega=\omega_0} = \left|\frac{V_C}{V_s}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- 共振の鋭さを表している。Qが大きいほど周波数選択制が増加する。
- R=0(損失のない時)は，Qは無限大となる。

V_c(緑)が全体の電圧を決めている。

V_L(赤)が全体の電圧を決めている。

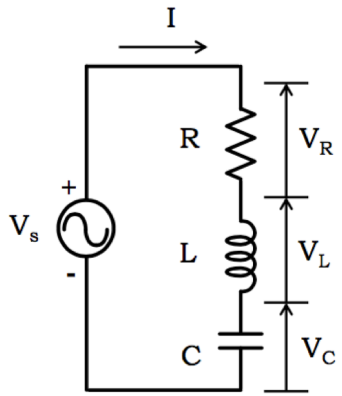


帯域幅

$$\Delta\omega = \omega_b = \omega_2 - \omega_1$$

$$\omega_b = \frac{\omega_0}{Q}$$

直列共振回路のアドミッタンスＩ



アドミッタンスのs表示を求めよ。（ラプラス変換）

$$Y(s) = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$= \frac{1}{L}\frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

極を求める。

$$p = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}}}{2}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{R}{2L\omega_0}\right)^2}$$

$$= \omega_0\left\{-\frac{R}{2L\omega_0} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{R}{2L\omega_0}\right)^2}\right\}$$

ここで

$$\frac{R}{2L\omega_0} = \frac{1}{2}\frac{R}{L}\sqrt{LC} = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2Q}$$

$$= \omega_0\left\{-\frac{1}{2Q} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right\}$$

直列共振回路のアドミッタンスⅡ

以上より

$$p = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} = -\omega_0\varsigma + j\omega_0\sqrt{1-\varsigma^2}$$

$$p^* = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} = -\omega_0\varsigma - j\omega_0\sqrt{1-\varsigma^2}$$

$$\varsigma = \frac{1}{2Q}$$

ちなみに

$$|p| = \sqrt{(\omega_0\varsigma)^2 + \omega_0^2(1-\varsigma^2)} = \omega_0$$

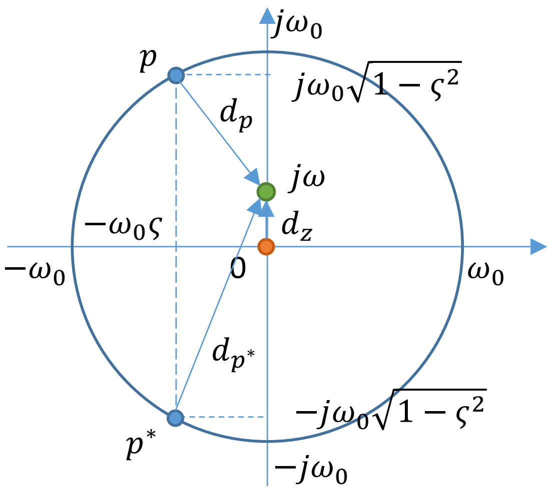
アドミッタンスは,

$$Y(s) = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{L}\frac{s}{(s-p)(s-p^*)} \longrightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{L}\frac{j\omega}{(j\omega-p)(j\omega-p^*)}$$

$s \to j\omega$変換

$Y(j\omega)$を複素平面で表示する。

直列共振回路のアドミッタンス III



$$Y(j\omega) = \frac{1}{L}\frac{j\omega}{(j\omega - p)(j\omega - p^*)}$$

$$= \frac{1}{L}\frac{d_z}{d_p d_{p^*}}\angle(\phi_Z - \phi_p - \phi_{p^*})$$

$Y(j\omega)$の周波数応答を見る。極大値を探す。

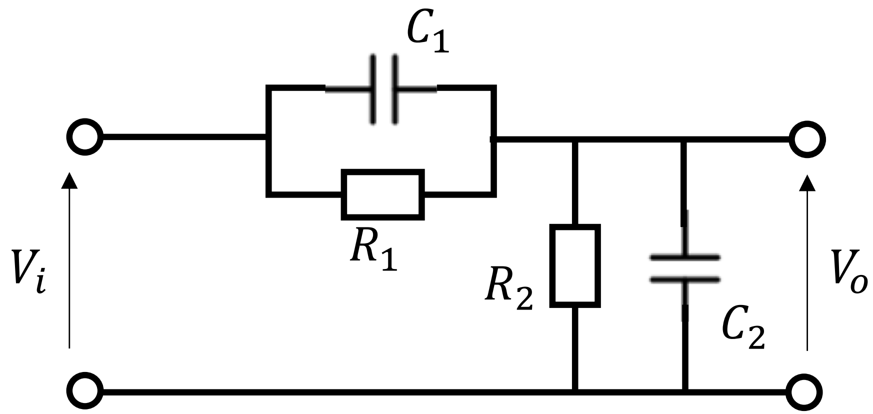
$$|Y(j\omega)| = \frac{1}{L}\frac{d_z}{d_p d_{p^*}} = \frac{1}{L}\frac{\omega}{\sqrt{\left(\omega_0\sqrt{1-\varsigma^2} - \omega\right)^2 + (\omega_0\varsigma)^2}\sqrt{\left(\omega_0\sqrt{1-\varsigma^2} + \omega\right)^2 + (\omega_0\varsigma)^2}}$$

$$= \frac{1}{L}\frac{\omega}{\omega\omega_0\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + 4\varsigma^2}}$$

- $\omega = \omega_0$のとき，$|Y(j\omega)| = \frac{1}{2\varsigma\omega_0 L} = \frac{1}{R}$となり，先のアドミッタンスの計算と一致する。
- $\omega = \omega_0$のとき位相は，ポールを合わせた位相が$\frac{\pi}{2}$となり，ゼロの位相$\frac{\pi}{2}$と打消し合い，回路全体の位相は0となる。（回路は，純抵抗に見える。）
- ポールが虚軸に近いほど，Q値は大きくなる。$s = \sigma + j\omega, \sigma < 0$，減衰。

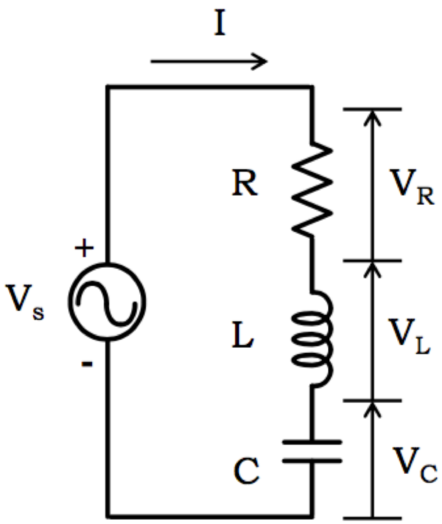
練習1

下図の回路で，電圧伝達比$\frac{V_o}{V_i}$が角周波数ωによらず一定となるときの角周波数を求めよ。また，その時の$\frac{V_o}{V_i}$を求めよ。



回答

練習2



左図のRLC直列共振回路において，$R = 2.0\Omega, L = 5.0\mathrm{mH}, C = 2.0\mu\mathrm{F}$とする。共振角周波数$\omega_0$，共振周波数$f_0$および回路の$Q$を求めよ。