2018年度　第2Q　　2018年7月27日

フーリエ変換とラプラス変換

第14回講義資料

担当: 角嶋邦之
kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp
工学院電気電子系

講義予定(全15回)

第1回	6/13	線形システムとは，周期関数の級数展開
第2回	6/15	フーリエ級数の性質
第3回	6/20	線形回路の周期波に対する定常応答
第4回	6/22	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説
第5回	6/27	非周期関数とフーリエ積分・フーリエ変換
第6回	6/29	フーリエ変換の存在と性質
第7回	7/4	時間領域表示と周波数領域表示，線形回路の時間応答と周波数応答
第8回	7/6	理解度の確認と解説

第9回	7/11	シャノンの標本化定理
第10回	7/13	離散フーリエ変換の基礎（定義，性質）
第11回	7/18	離散フーリエ変換の実際（帯域制限，窓関数，高速フーリエ変換，応用例）
第12回	7/20	0～∞上の関数とラプラス変換，ラプラス変換の性質，部分分数展開
第13回	7/25	ラプラス逆変換，線形回路の過渡応答
第14回	7/27	システムの安定性，電気電子システムへの応用，z変換
第15回	8/1	講義後半の期末試験

ラプラス変換の電気電子システムへの応用

フィルタ設計

電気信号に帯域制限を掛けたり、特定の周波数成分のみを抽出するための電気回路

- ローパス: 低周波のみ透過
- ハイパス: 高周波のみ透過
- バンドパス: ある周波数域のみ透過
- バンドエリミネーション: ある周波数のみ遮断

制御器設計

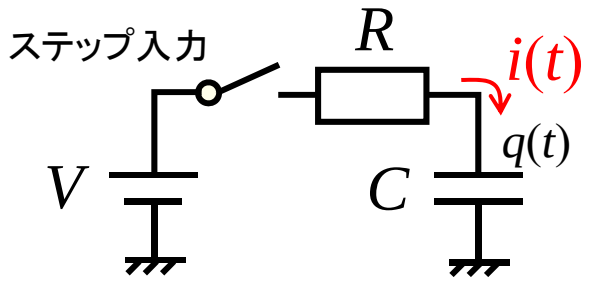
ダイナミクス(微分・積分を含む伝達関数)をコントロールする工学的手法

入出力関係で制御: 古典制御 (PIDなど)
状態変数: 現代制御(ラプラス変換は使えない)

目的: 目標値追従特性、外乱抑制特性の向上

周波数応答: ラプラス変換とフーリエ変換の関係

下記のRC回路を考える



$t<0,\ i(t)=0$

$q(0)=0$

$$V = iR + \frac{1}{C}\int i\,dt \quad \xrightarrow[\text{ラプラス変換}]{} \quad \frac{V}{s} = IR + \frac{1}{sC}I$$

$$\therefore\ I(s) = \frac{V}{R}\frac{1}{s+1/CR} \quad \xrightarrow[\text{ラプラス逆変換}]{} \quad i(t) = \frac{V}{R}e^{-t/CR}$$

得られた電流波形をフーリエ変換する

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t)e^{-j\omega t}dt$$

jは虚数

($t<0,\ i(t)=0$ より)

$$= \int_{0}^{\infty} i(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{V}{R}e^{-t/CR}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{V}{R}\frac{1}{j\omega + 1/CR}$$

ラプラス変換のsを$j\omega$に変えた形になっている

システムの周波数応答を見たい場合は$s \to i\omega$に変えて解析する

例) 一次遅れ系

$$W(s) = \frac{A}{1+Ts} \quad \Rightarrow \quad W(i\omega) = \frac{A}{1+i\omega T}$$

利得(gain)

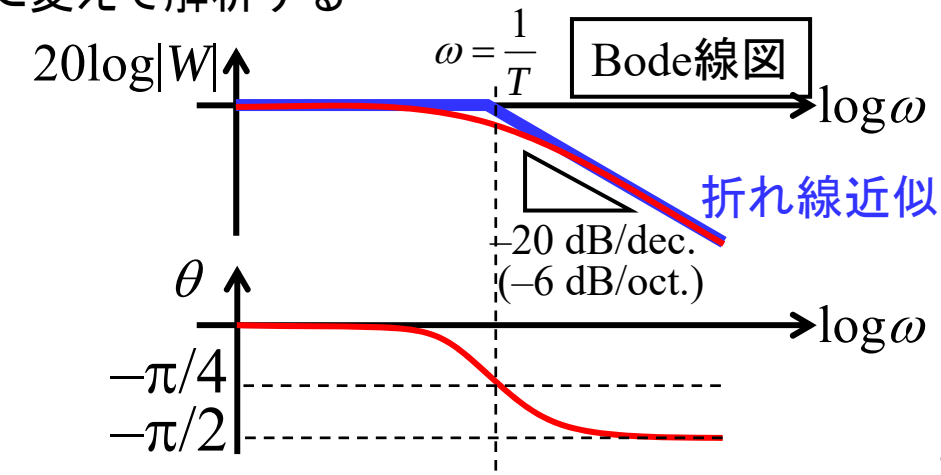
$$|W| = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2T^2}},$$

位相(phase)

$$\arg W = -\tan^{-1}\omega T$$

デシベル表示

$$20\log|W| = 20\log A - 20\log\left|1+\omega^2T^2\right|^{\frac{1}{2}}$$



システムの安定性評価

$$W(s)=\frac{A_1}{(s-s_1)}+\frac{A_2}{(s-s_2)}+\cdots\frac{A_i}{(s-s_i)}+\cdots\frac{A_n}{(s-s_n)}$$

と記述できるシステムを考える

$s_1, s_2, \ldots s_i, \ldots, s_n$ を極という

インパルスを入力して、ラプラス逆変換すると、

$$\omega(t)=\left(A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}+\cdots+A_ie^{s_it}+\cdots+A_ne^{s_nt}\right)\delta(t)$$

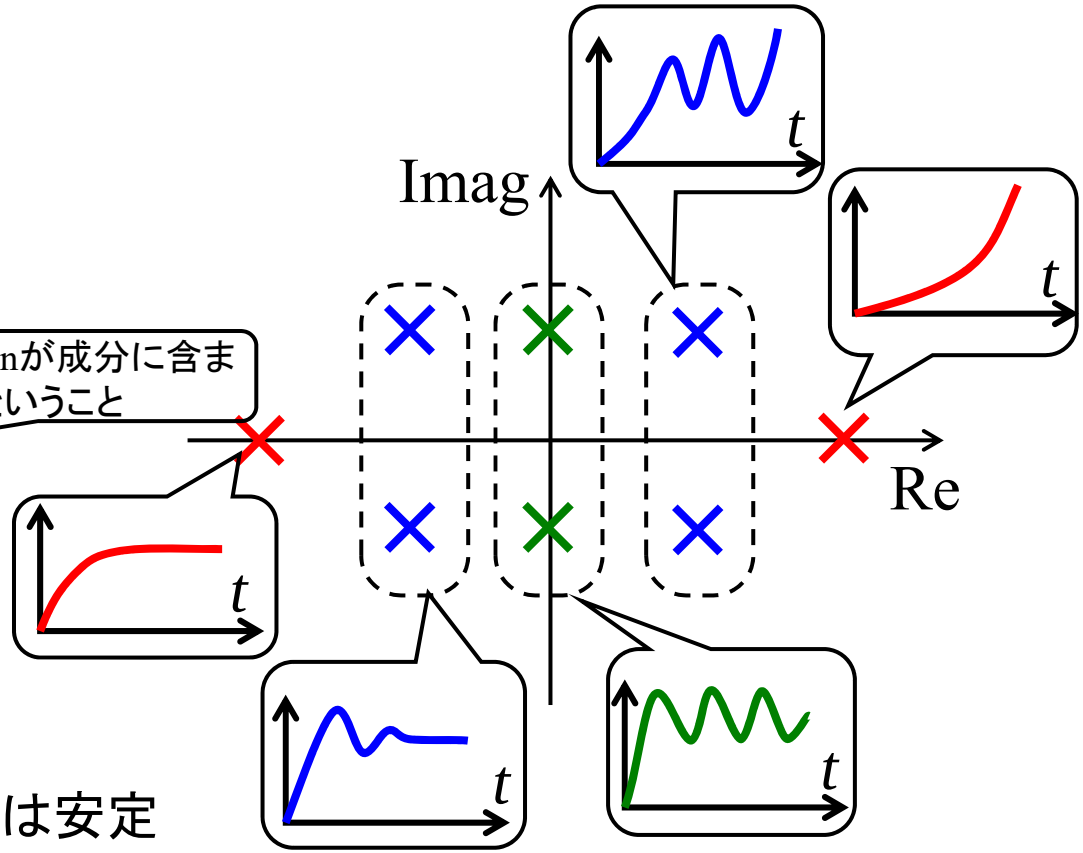
<u>(1) s_iが実数α_iの場合</u>

$\alpha_i<0$ であれば、$t\to\infty$で収束
$\alpha_i>0$ なら、発散 → 不安定

<u>(2) s_iが複素数$\alpha_i+i\omega$の場合</u>

$\alpha_i<0$ であれば、$t\to\infty$で収束
$\alpha_i>0$ なら、発散 → 不安定

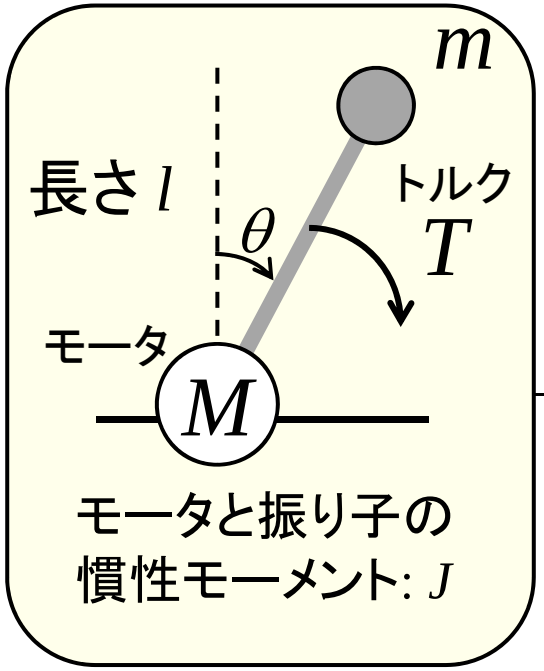
cos, sinが成分に含まれるということ



極の実数部が負にあればシステムは安定

フィードバック制御設計によるシステムの安定化

下図の倒立振り子を考える。
入力:モータのトルク、 出力:角度



運動方程式 $J\ddot{\theta} = mgl\sin\theta + \overset{\text{トルク}}{T}$

θ<<1の場合、$\sin\theta \sim \theta$の近似が可能

$$J\ddot{\theta} = mgl\theta + T$$

(初期値は0とする)

ラプラス変換を行う $Js^2\Theta = mgl\Theta + \mathrm{T}$

伝達関数は $\dfrac{\Theta(s)}{\mathrm{T}(s)} = \dfrac{1}{J}\dfrac{1}{\left(s+\sqrt{mgl/J}\right)\left(s-\sqrt{mgl/J}\right)}$

目標値を $\theta_0(t)$とする

$\overset{\text{トルク}}{T} = K_1(\theta-\theta_0) + K_2\dot{\theta}$ というフィードバックを考える

すると運動方程式は $J\ddot{\theta} = mgl\theta + K_1(\theta-\theta_0) + K_2\dot{\theta}$

$$Js^2\Theta = mgl\Theta + K_1(\Theta-\Theta_0) + K_2 s\Theta$$

(初期値は0とする)

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{-K_1}{Js^2 - K_2 s - mgl - K_1}$$

ステップ入力(1/s)後の定常状態($t\to\infty$)では最終定理より($s\to 0$)

$$\theta(\infty) = \frac{K_1}{mgl+K_1} \quad \left(|K_1|\to\text{大が良い?}\right)$$

一方、極の値は

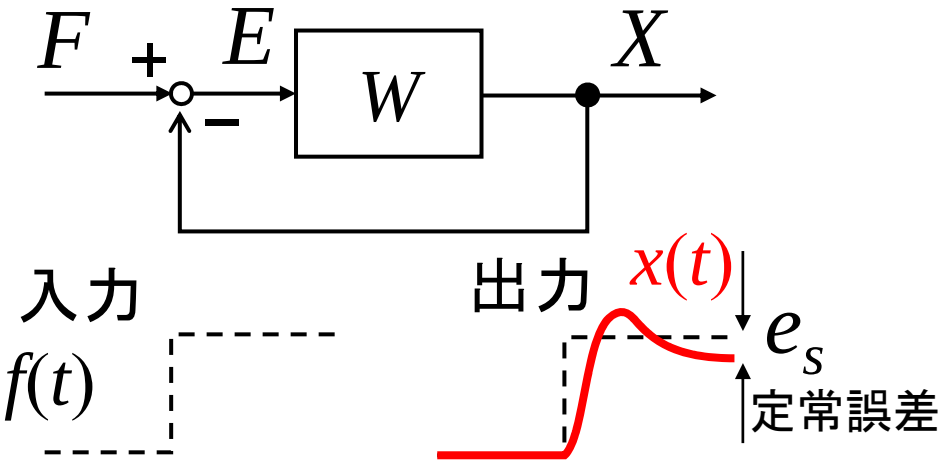
$$s = \frac{K_2 \pm \sqrt{K_2^{\,2} + 4J(mgl+K_1)}}{2J}$$

安定化には、極が複素平面の左半面内であるべき
ルートの中が正でもK_2^2を超えたらダメなので、

$K_1<0,\ K_2<0$ とすべき

定常誤差とその量

ステップ入力に対する最終値の誤差



$$E = F - X = \left(1 - \frac{W(s)}{1+W(s)}\right)F = \frac{1}{1+W(s)}F$$

最終値の定理

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+W(s)}\frac{1}{s}$$

ステップ入力

$$= \frac{1}{1+W(0)}$$

$e_s = 0$ とするためには$W(0)$が∞である必要がある

$W(0)=\infty$ となるためには、

$$W(s) = \frac{\cdots}{s(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

のように分母にsが必要

$W(s)$の分母にsがない場合

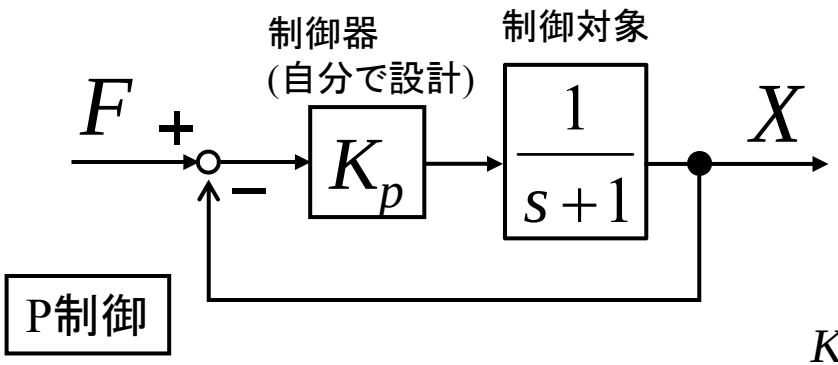
$$e_s = \frac{1}{1+K}$$

定常誤差
K: 定常ゲイン

定常誤差を無くしたい場合

$1/s$の伝達関数を有する制御器を導入すればよい。

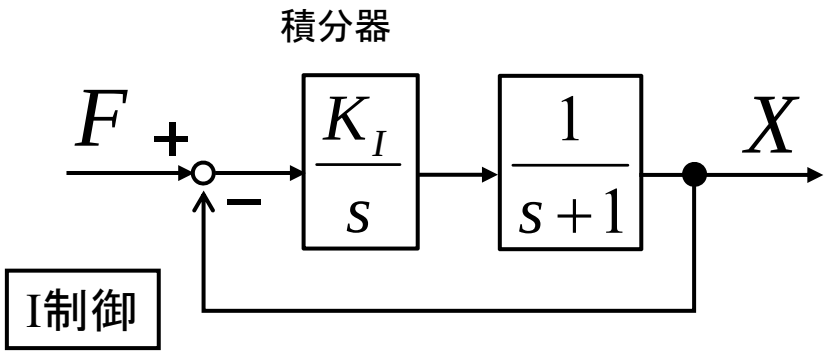
制御器の導入と一次遅れ系1/(*Ts*+1)の安定性



一次遅れ系

$$\frac{X}{F}=\frac{K_p}{1+K_p}\frac{1}{1+\frac{1}{1+K_p}s}$$

K_pをいくら大きくしても安定。しかし、定常誤差が残る。



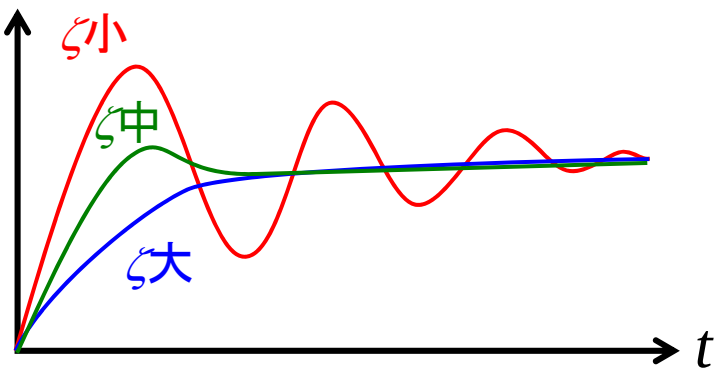
二次遅れ系になる

$$\frac{X}{F}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

K_Iをいくら大きくしても安定、定常誤差もない。

固有角周波数　　減衰係数

$$\omega_n=\sqrt{K_I},\qquad \zeta=\frac{1}{2\omega_n}=\frac{1}{2\sqrt{K_I}}$$

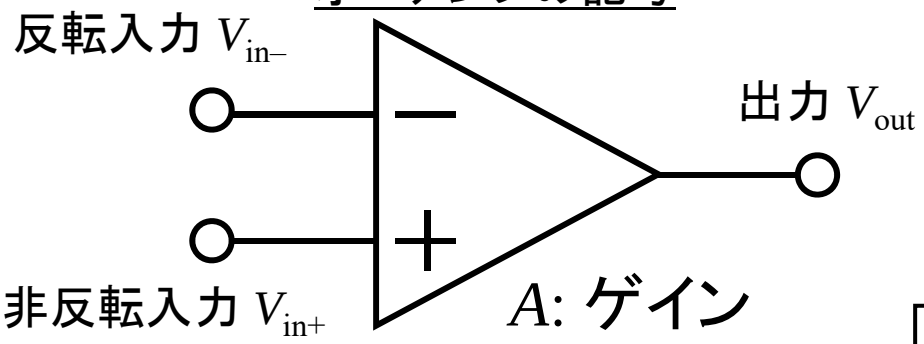


ω_n は応答の速さ、ζは応答波形を決定する。
しかし、ω_n を大きくするためにK_Iを大きくするとζが小さくなり振動的になる。

アナログ制御器の実現法

オペアンプを使う
(operational amplifier)

オペアンプの記号

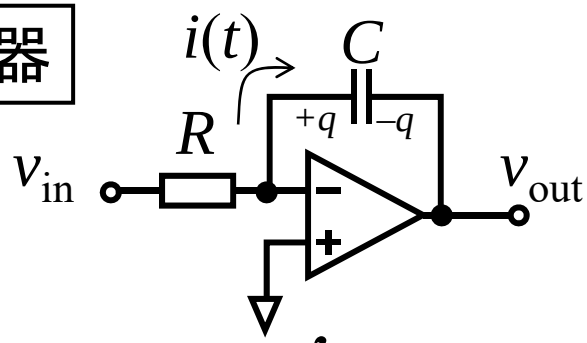


$$V_{out}=A\,(V_{in+}-V_{in-})$$

入力の差にゲインを掛けて出力する素子

- 入力インピーダンスは十分大きいとする
- 非反転入力を接地すると反転入力も接地とみなせる。(バーチャルショート)

積分器

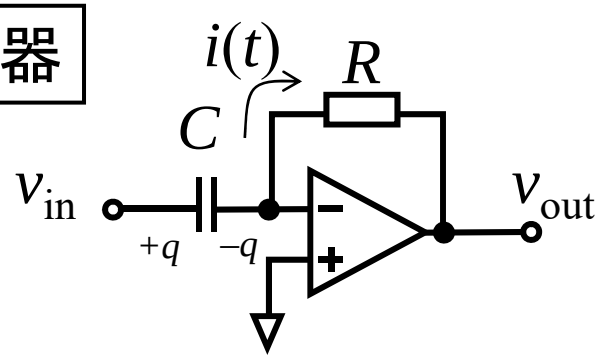


$$I=V_{in}/R,\quad q=\int I dt,\quad V_{out}=-q/C$$

$$v_{out}=-\int\frac{1}{RC}v_{in}dt$$

$$V_{out}=-\frac{V_{in}}{sRC}$$

微分器



$$i=-v_{out}/R,\quad q=\int i dt,\quad v_{in}=q/C$$

$$v_{out}=-RC\frac{dv_{in}}{dt}$$

$$V_{out}=-sRCV_{in}$$

離散時間信号のラプラス変換とz変換

離散時間信号$x_s(t)$ は単位インパルス列$\delta_T(t)$で表現できる($t \geqq 0$)

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t)\delta(0) + x(t)\delta(t-T) + x(t)\delta(t-2T) + \cdots$$

ラプラス変換をすると

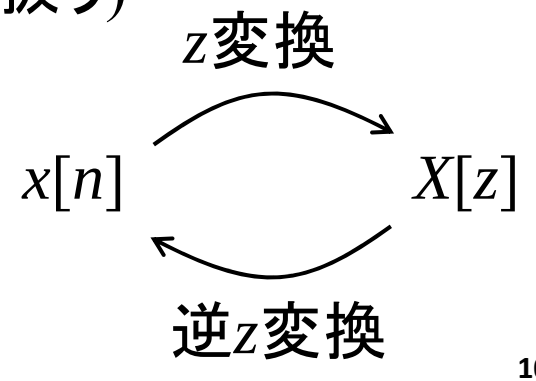
$$X_s(s) = \int_0^\infty \{x(t)\delta(0) + x(t)\delta(t-T) + x(t)\delta(t-2T) + \cdots\} e^{-st} dt$$

$$= x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}$$

複素関数 z を $z = e^{sT}$ と定義し、サンプリング時間T

でなく、単位サンプリング時刻とする(数列として扱う)

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$



代表的なz変換と変換表

■ 単位インパルス のz変換

$$X[z]=\sum_{n=0}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=\delta[0]z^{-1}=1$$

■ 単位ステップ数列 のz変換

$$X[z]=\sum_{n=0}^{\infty}u[n]z^{-n}=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}}_{\text{等比数列}}=\frac{1}{1-z^{-1}},\quad (|z|>1)$$

■ $x[n]=a^n u[n]$ のz変換

$$X[z]=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad (|z|>|a|)$$

■ $x[n]=e^{-anT}u[n]$ のz変換

$$X[z]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-anT}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-aT}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

(a が実数の時、$|z|>e^{-aT}$)
(a が虚数の時、$|z|>1$)

代表的な数列のz変換対

$x[n]$	$X[z]$	収束領域
$\delta(n)$	1	全平面
$\delta(n-m)$	z^{-m}	$z\neq 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\sin(n\omega T)u(n)$	$\frac{\sin\omega Tz^{-1}}{1-2\cos\omega Tz^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$\cos(n\omega T)u(n)$	$\frac{1-\cos\omega Tz^{-1}}{1-2\cos\omega Tz^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$n\alpha^{n-1}u(n)$	$\frac{z}{(z-\alpha)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$

z変換のイメージ

<u>数列の例</u>　$x[n]=\{1, 1, 0, -2\}$　($x[n]$の数列、但し、$n<0$では、$x[n]=0$とする)

z変換 → $X[z]=1+1\cdot z^{-1}+0\cdot z^{-2}-2\cdot z^{-3}$

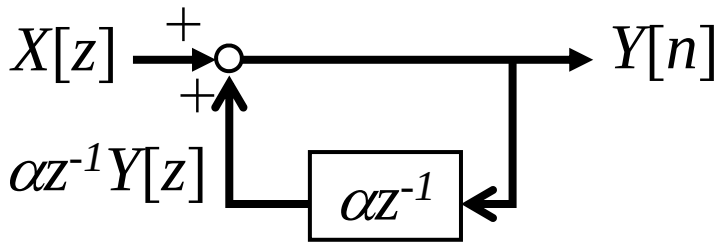
<u>差分方程式</u>　伝達関数　$H[z]=\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$

$$Y[z]=H[z]X[z],\ Y[z]=\underline{\alpha z^{-1}Y[z]}+X[z]$$

時間領域で表現すると差分方程式

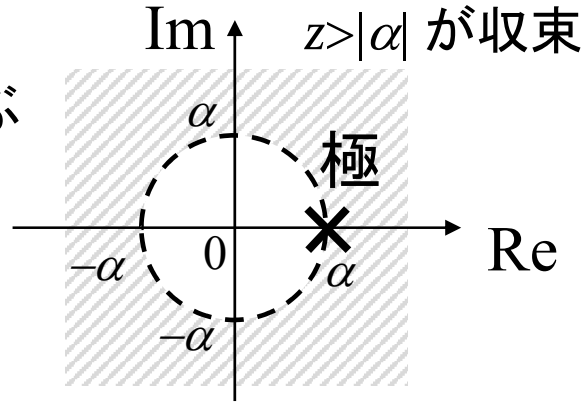
$$y[n]=\alpha\underline{y[n-1]}+x[n]$$

$\alpha>1$なら発散、$\alpha<1$なら減衰



$z>|\alpha|$ が収束条件

$z=\alpha$を極と呼ぶ



z変換の性質と差分方程式

$x[n]$は数列、但し、$n<0$では、$x(n)=0$とする

線形性

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \Leftrightarrow a_1 X_1[z] + a_2 X_2[z]$$

指数数列の積

$$e^{-anT} x[n] \Leftrightarrow X\left[e^{aT} z\right]$$

畳み込みの定理

$$\mathcal{Z}^{-1}\left(X_1 X_2\right) = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k] x_1[n-k]$$

推移定理

$$x[n-m] \Leftrightarrow z^{-m} X[z]$$

(証明)

$$\mathcal{Z}\{x[n-m]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-m] z^{-n}$$

$$= z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} x[n-m] z^{-(n-m)}$$

($n-m=k$とおく)

$$= z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

$$= z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} = z^{-m} X[z]$$

z^{-1}は単位時間
遅延演算子

逆z変換の導出方法 (2種類の方法)

$$X[z] = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$ の逆z変換を求める

部分分数展開による算出

$$X[z] = \frac{z}{3(z-1)\left(z - 1/3\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)$$

$$\therefore x[n] = \frac{1}{2}\left(1 - 3^{-n}\right) \quad (n \geq 0)$$

$x[0] = 0$
$x[1] = 1/3$
$x[2] = 4/9$
$x[3] = 13/27$
$x[4] = 40/81$
$\cdots$

べき級数展開による算出

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{4}{9}z^{-2} + \frac{13}{27}z^{-3} + \frac{40}{81}z^{-4} \\
\hline
3z^2-4z+1 & z \\
 & z - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} \\
\hline
 & \frac{4}{3} - \frac{1}{3}z^{-1} \\
 & \frac{4}{3} - \frac{16}{9}z^{-1} + \frac{4}{9}z^{-2} \\
\hline
 & \frac{13}{9}z^{-1} - \frac{4}{9}z^{-2} \\
 & \frac{13}{9}z^{-1} - \frac{52}{27}z^{-2} + \frac{13}{27}z^{-3} \\
\hline
 & \frac{40}{27}z^{-2} - \frac{13}{27}z^{-3} \\
 & \frac{40}{27}z^{-2} - \frac{160}{81}z^{-3} + \frac{40}{81}z^{-4} \\
\hline
 & \cdots
\end{array}$$

$x[0] = 0$
$x[1] = 1/3$
$x[2] = 4/9$
$x[3] = 13/27$
$x[4] = 40/81$
$\cdots$

本日の演習問題

$X\left[z\right]=\dfrac{4z^2-z}{2z^2-2z+1}$ をべき級数展開法を用いて逆z変換$x[n]$を求めよ。

但し、n=3までで良い。

z変換の利用 (差分方程式、積分/微分)

2階の差分方程式の一般解

$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

特性方程式 $x^2-4x+4=0$

特性方程式の解 $x=2$ (重解)

平行移動

$x_0=0,\ x_1=1,\ x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=0$

z変換

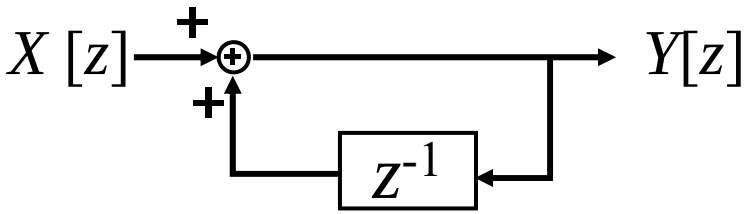
$$z^2X[z]-z-4zX[z]+4X[z]=0$$

$$X[z]=\frac{z}{(z-2)^2}$$

逆z変換　$x_n=n\cdot 2^{n-1}$

よって　$a_n=x_{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-2}$

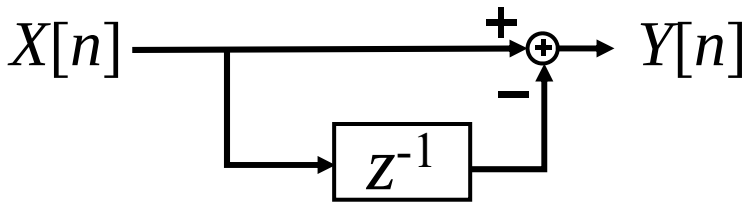
積分　(厳密には累積)



$$Y[z]=\frac{1}{1-z^{-1}}X[z]$$

$$y[n]=x[n]+y[n-1]$$

微分　(厳密には差分)



$$Y[z]=\left(1-z^{-1}\right)X[z]$$

$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$

デジタルフィルタの設計などに用いる