

本日の演習問題①

次の関数のラプラス変換を求めよ。

$$(1) \ f(t) = e^{2t} \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{2t} \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{(2-s)t}}{2-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-2} \quad (s > 2)$$

$$(2) \ f(t) = \cos \omega t$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos \omega t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} \cdot \omega \sin \omega t dt$$

$$= -\frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sin \omega t dt$$

$$= -\frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} \left\{ \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin \omega t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} \cdot \omega \cos \omega t dt \right\}$$

$$= -\frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \cos \omega t dt$$

※ $F(s)$ がでてくる

よって $F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (s > 0)$

本日の演習問題②

(3) 次の関数のラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 3) \\ (t-3)^2 & (3 \leq t) \end{cases}$$

解

まず、以下の t^2 ラプラス変換を考える

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^2) &= \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt = \left[-\frac{t^2}{s} e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{2}{s} \int_0^\infty t e^{-st} dt \\ &= \frac{2}{s} \left[-\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{2}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= \frac{2}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{2}{s^3}\end{aligned}$$

移動法則を利用すると

$$\mathcal{L}\{(t-3)^2\} = e^{-3s} \mathcal{L}(t^2) = \frac{2e^{-3s}}{s^3}$$

(4) 次の関数のラプラス逆変換を求めよ。

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)^2 + 1}$$

解

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2 + 1}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} + \frac{2}{(s-2)^2 + 1}\right) \\ &= e^{2t}(\cos t + 2 \sin t)\end{aligned}$$

本日の演習問題③

次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

$$(5) \begin{cases} x'' + 6x' + 10x = 0 \\ x(0) = x'(0) = 2 \end{cases}$$

ラプラス変換

$$s^2 X - sx(0) - x'(0) + 6\{sX - x(0)\} + 10X = 0$$

Xについて解く

$$(s^2 + 6s + 10)X = 2(s + 7)$$

$$X = \frac{2(s+3)}{(s+3)^2 + 1} + \frac{8}{(s+3)^2 + 1}$$

両辺のラプラス逆変換

$$x(t) = 2e^{-3t}(\cos t + 4 \sin t)$$

$$(6) \begin{cases} x'' + \lambda^2 x = f(t) \\ \lambda \neq 0, x(0) = a, x'(0) = b \end{cases}$$

ラプラス変換

$$s^2 X - sx(0) - x'(0) + \lambda^2 X = F(s)$$

Xについて解く

$$(s^2 + \lambda^2)X = as + b + F(s)$$

$$X = \frac{as}{s^2 + \lambda^2} + \frac{b}{s^2 + \lambda^2} + \frac{F(s)}{s^2 + \lambda^2}$$

両辺のラプラス逆変換(合成法則を用いる)

$$x(t) = a \cos \lambda t + \frac{b}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sin \lambda(t-\tau) \cdot f(\tau) d\tau$$