2018年度　第2Q　　2018年7月13日

フーリエ変換とラプラス変換

第10回講義資料

担当: 角嶋邦之
kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp
工学院電気電子系

講義予定(全15回)

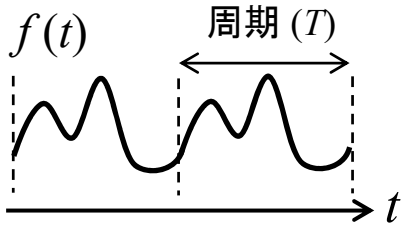
第1回	6/13	線形システムとは，周期関数の級数展開
第2回	6/15	フーリエ級数の性質
第3回	6/20	線形回路の周期波に対する定常応答
第4回	6/22	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説
第5回	6/27	非周期関数とフーリエ積分・フーリエ変換
第6回	6/29	フーリエ変換の存在と性質
第7回	7/4	時間領域表示と周波数領域表示，線形回路の時間応答と周波数応答
第8回	7/6	理解度の確認と解説

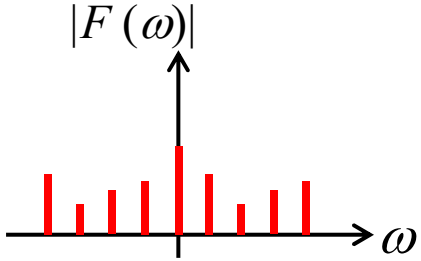
第9回	7/11	シャノンの標本化定理
第10回	7/13	離散フーリエ変換の基礎（定義，性質）
第11回	7/18	離散フーリエ変換の実際（帯域制限，窓関数，高速フーリエ変換，応用例）
第12回	7/20	0～∞上の関数とラプラス変換，ラプラス変換の性質，部分分数展開
第13回	7/25	ラプラス逆変換，線形回路の過渡応答
第14回	7/27	システムの安定性，電気電子システムへの応用，z変換
第15回	8/1	講義後半の期末試験

関数のフーリエ変換、逆変換

■周期関数 $f(t)$のフーリエ級数展開 → 周波数のみ離散的

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right\}$$





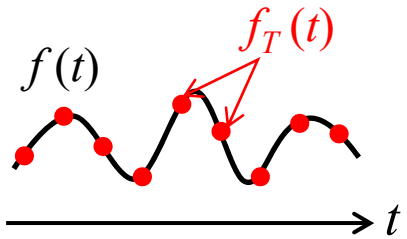
■ 非周期関数 $f(t)$を時間Tでサンプリングした関数 $f_T(t)$ → $F[f_T(t)]$は周期的で連続

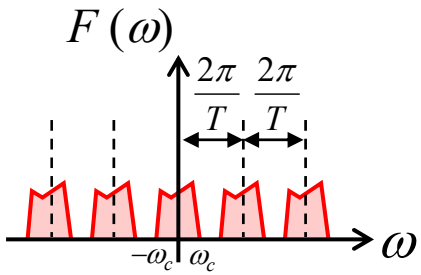
$$F[f_T(t)]=F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)e^{-inT\omega}$$

離散時間フーリエ変換 (DTFT)
Discrete-Time Fourier Transform

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}F(\omega)e^{i\frac{2\pi}{T}t}d\omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\frac{\sin\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$

この計算で $f_T(t)$ でなく $f(t)$ が導出される (中心の1周期分)





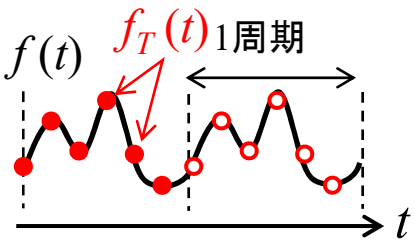
■サンプリング値関数 $f_T(t)$が周期的: $f(n)$ → $F[f(n)]$は周期的で離散的

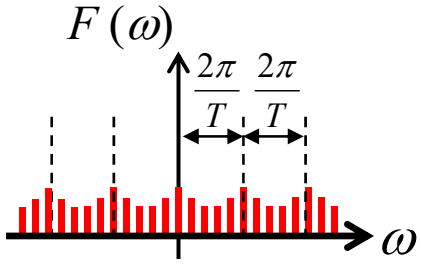
$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1}f(n)e^{-i2\pi kn/N}$$

離散フーリエ変換 (DFT)
Discrete Fourier Transform

$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}F(k)e^{i2\pi kn/N}$$

逆離散フーリエ変換 (IDFT)
Inverse Discrete Fourier Transform





離散時間フーリエ変換 (Discrete-Time Fourier Transform: DTFT)

非周期関数 $f(t)$ のサンプリング値関数 $f_T(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$

$$F(\omega) = F[f_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-inT\omega}$$

※Tはサンプリング時間
※nは整数

(前回の講義で導出済)

$f[n] = f(nT)$ となる数列を離散時間関数とする

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-in\omega}$$

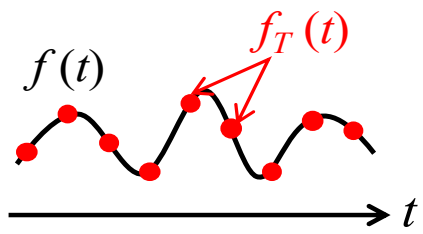
<u>離散時間フーリエ変換</u>

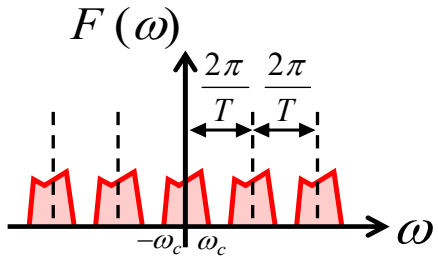
$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{i\omega n} d\omega$$

<u>離散時間逆フーリエ変換</u>

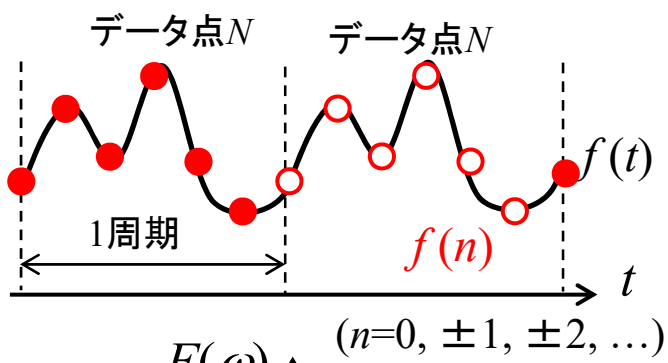
$f(t)$ のフーリエ変換 $F_a(\omega)$ との関係は、下記の式で表現できる

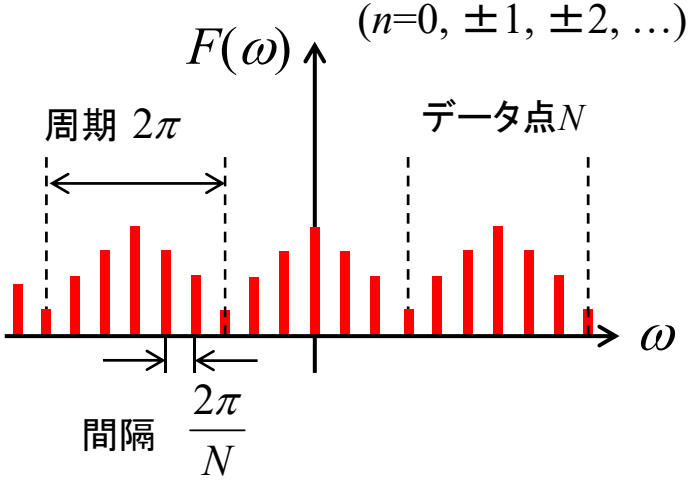
$$F(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_a\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$





逆離散フーリエ変換の導出





周期的な離散時間関数 $f[n]$の離散時間逆フーリエ変換

$$f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\omega)e^{i\frac{2\pi}{T}n}d\omega$$

※Tはサンプリング時間

※ここでは、$f[n]$は$f_T(t)$です。ただし、$t=nT/N$

$f(n)$は周期関数のため、$F(\omega)$は離散的になる

$$F(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

但し、 $c_k=c_{k+N}$

これを上の式に代入する

$$f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)e^{i\frac{2\pi}{T}n}d\omega$$

周期2πの中にN本のデルタ関数が存在するので
連続するN個のkについて総和をとることになる。

$$f[n]=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}c_k e^{i\frac{2\pi}{T}n}$$

ここで、$c_k=\frac{2\pi}{N}F(k)$ とおき、$f[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k)e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$ を逆離散フーリエ変換と定義

離散フーリエ変換

離散時間(サンプリング値)関数 $f[n]$ の離散時間フーリエ変換

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-i\omega n}$$

ωの値は $2\pi k/N$ (k=0,1,2, …, N-1)となるため、
新たに離散かされた $F[k]$を導入する

$$F[k]=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

離散フーリエ変換 (DFT)
Discrete Fourier Transform

逆離散フーリエ変換で、確認すると

$$f[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F[k]e^{i\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{m=0}^{N-1}f[m]e^{-i\frac{2\pi}{N}km}\right\}e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f[m]\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}k(n-m)}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f[m]N\delta_{m,n}\left(\quad =f[n]\quad\right)$$

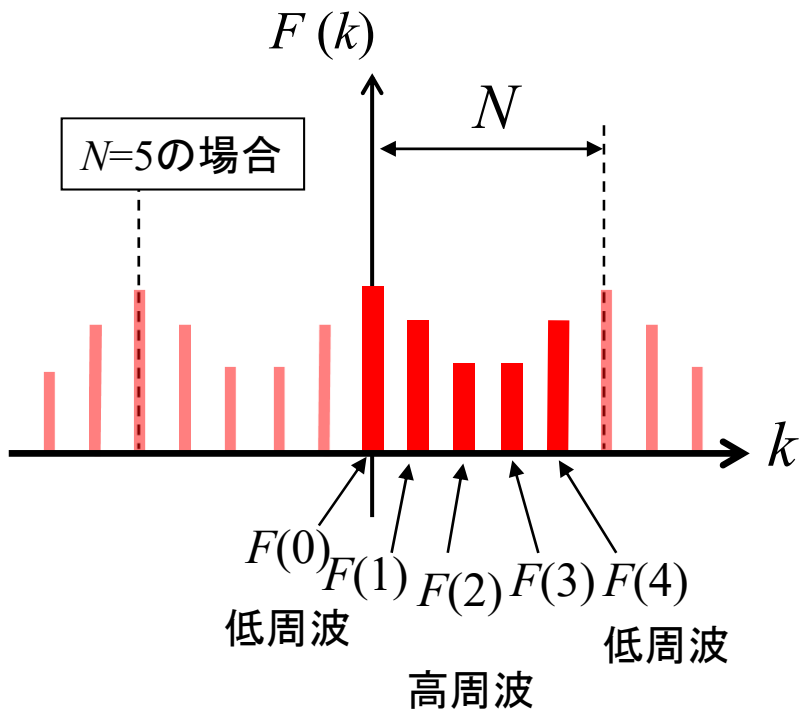
	解析対象	工学的な利用
フーリエ級数	無限長の周期関数	理論上の解析
フーリエ変換	無限長の非周期関数	理論上の解析
離散フーリエ変換	有限長の離散信号 (周期的とみなす)	デジタル信号の解析

$$f(t)\ \leftrightarrow\ F(\omega)$$

$$f[n]\ \leftrightarrow\ F[k]$$

離散フーリエ変換の描像

$$F[k]=\sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$



k=N/2に近づくと
高周波成分

スペクトルについて

$$F[k]=a_k+ib_k$$

$|F(k)|$: 振幅スペクトル

$$F[k]=\sqrt{\mathrm{Re}\left(F[k]\right)^2+\mathrm{Im}\left(F[k]\right)^2}=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

$\angle F(k)$: 位相スペクトル

$$\angle F[k]=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\left(F[k]\right)}{\mathrm{Re}\left(F[k]\right)}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

$|F[k]|^2$: パワースペクトル

$$\left|F[k]\right|^2=\mathrm{Re}\left(F[k]\right)^2+\mathrm{Im}\left(F[k]\right)^2$$
$$=a_k^2+b_k^2$$

離散フーリエ変換の計算例

下記の離散信号の離散フーリエ変換を求める

$$f[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)$$

k_0: 周波数
n: 整数, N:自然数

オイラーの公式を利用すると

$$F[k] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{e^{i\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)} + e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)}\right\}e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{e^{i\frac{2\pi}{N}n(k_0-k)} + e^{-i\frac{2\pi}{N}n(k_0+k)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{e^{i\frac{2\pi}{N}n(k_0-k)} + e^{i\frac{2\pi}{N}n(N-k_0-k)}\right\}$$

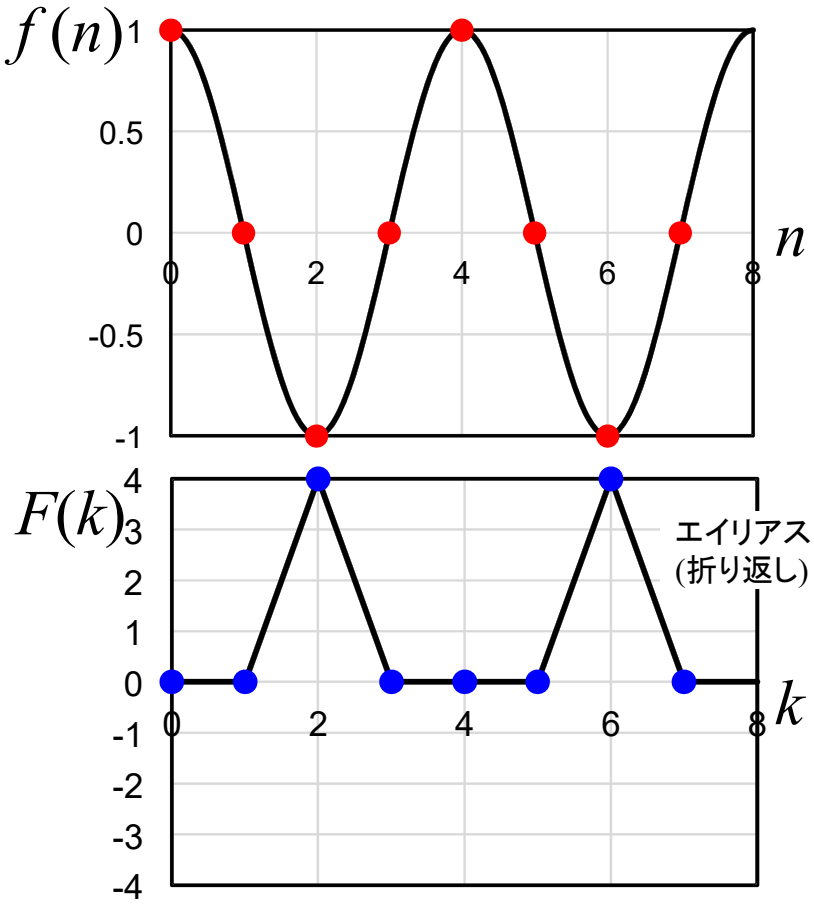
$\left(e^{i2\pi n} = 1\right)$

を利用

離散フーリエ変換の計算例 (つづき)

(N=8 の例)

k_0=2の時の離散フーリエ変換の様子



第1項

$k = k_0$ のとき

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(k_0-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

$k \neq k_0$ のとき

cos(2π)=1

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(k_0-k)} = \frac{1-e^{i\frac{2\pi}{N}N(k_0-k)}}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(k_0-k)}} = 0$$

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(k_0-k)} = N\delta_{k_0,k}$

第2項 $k = N - k_0$ のとき

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(N-k_0-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(N-k_0-k)} = N\delta_{N-k_0,k}$

離散フーリエ変換の具体例

次の4点のデジタル信号を離散フーリエ変換した際の周波数スペクトルを求める。

$$f[n]=\begin{cases}1\ (n=0)\\1\ (n=1)\\0\ (n=2)\\1\ (n=3)\end{cases}$$

$$F[k]=\sum_{n=0}^{N-1}f[n]e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$ を利用して計算する (但し、N=4)

オイラーの公式

$$e^{-i\frac{\pi}{2}kn}=\cos\left(\frac{\pi}{2}kn\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}kn\right)$$

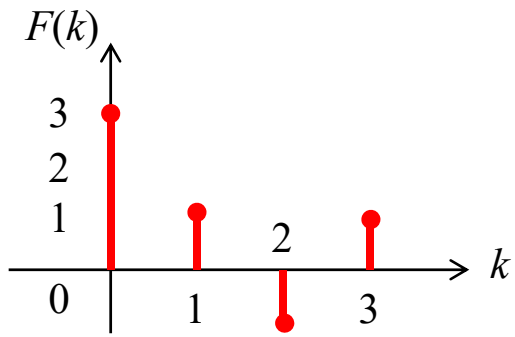
$$\begin{cases}e^{0}=e^{-i2\pi}=e^{-i4\pi}=1\\e^{-i\frac{\pi}{2}}=e^{-i\frac{5\pi}{2}}=e^{-i\frac{9\pi}{2}}=-i\\e^{-i\pi}=e^{-i3\pi}=e^{-i5\pi}=-1\\e^{-i\frac{3\pi}{2}}=e^{-i\frac{7\pi}{2}}=e^{-i\frac{11\pi}{2}}=i\end{cases}$$

$$F[0]=\sum_{n=0}^{N-1}f[n]=f[0]+f[1]+f[2]+f[3]=3$$

$$F[1]=f[0]+f[1]e^{-i\frac{\pi}{2}}+f[2]e^{-i\frac{2\pi}{2}}+f[3]e^{-i\frac{3\pi}{2}}=1-i+0+i=1$$

$$F[2]=f[0]+f[1]e^{-i\pi}+f[2]e^{-i2\pi}+f[3]e^{-i3\pi}=1-1+0-1=-1$$

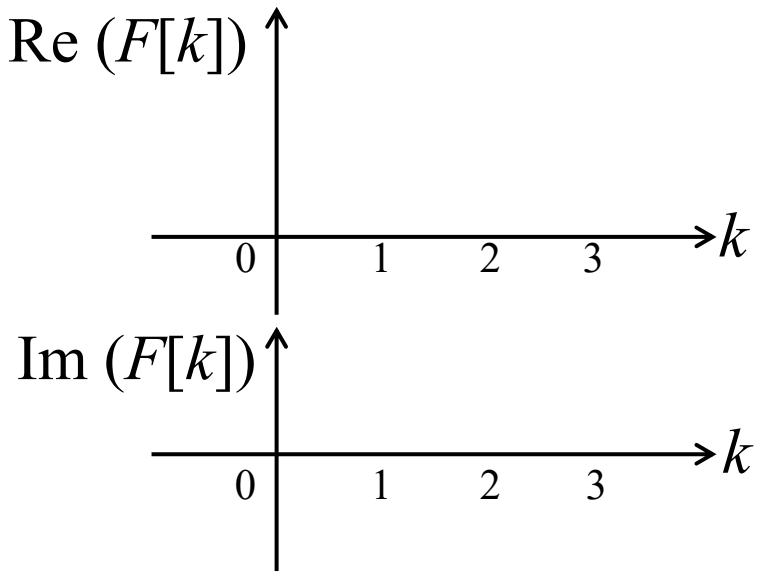
$$F[3]=f[0]+f[1]e^{-i\frac{3\pi}{2}}+f[2]e^{-i\frac{6\pi}{2}}+f[3]e^{-i\frac{9\pi}{2}}=1+i+0-i=1$$

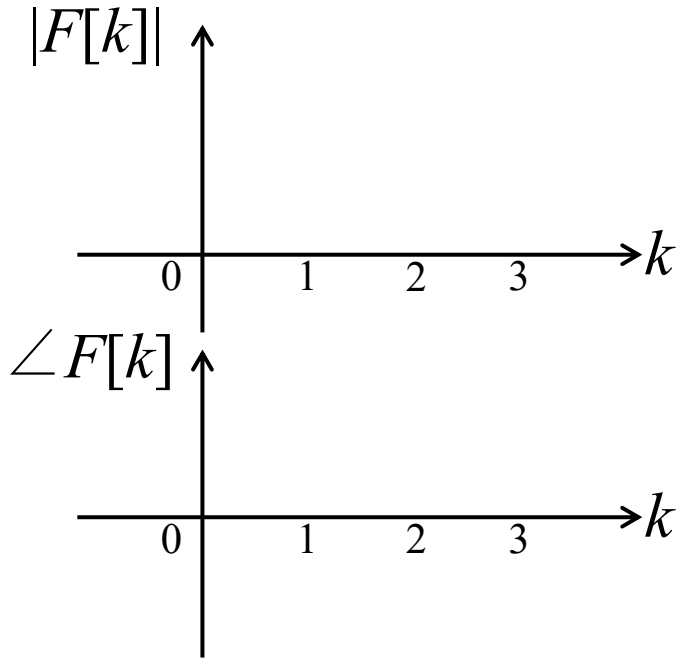


本日の演習問題 1

次の4点の離散時間信号を離散フーリエ変換した際の周波数スペクトル$F(k)$、振幅スペクトル$|F(k)|$、位相スペクトル$\angle F(k)$を求めよ。

$$f[n] = \begin{cases} 1 \ (n=0) \\ 3 \ (n=1) \\ -1 \ (n=2) \\ -2 \ (n=3) \end{cases}$$





離散フーリエ変換の性質

(1) 線形性

$$a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n] \leftrightarrow a_1 F_1[k] + a_2 F_2[k]$$

(2) 周期性

$$F[k+rN]=F[k]$$

(但し、rは任意の整数)

(3) 循環推移

$$f[n-m] \leftrightarrow F[k] e^{-i\frac{2\pi}{N}km}$$

$$f[n+m] \leftrightarrow F[k] e^{i\frac{2\pi}{N}km}$$

(4) 時間反転

$$f[-n] \leftrightarrow F[-k]$$

(5) 対称性

$$F^*[k] = F[-k] = F[N-k]$$

(*は共役複素数)

離散フーリエ変換の循環推移の証明

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n-m] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n-m] e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-m)} e^{-i\frac{2\pi}{N}km}$$

$n-m=n'$ とおく

$$= e^{-i\frac{2\pi}{N}km} \sum_{n'=-m}^{N-1-m} f[n'] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'} = e^{-i\frac{2\pi}{N}km} \left\{ \sum_{n'=-m}^{-1} f[n'] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'} + \sum_{n'=0}^{N-1-m} f[n'] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'} \right\}$$

括弧内の第一項は、$l=n'+N$ とおくと

$$\sum_{n'=-m}^{-1} f[n'] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'} = \sum_{l=N-m}^{N-1} f[l-N] e^{-i\frac{2\pi}{N}k(l-N)} = \sum_{l=N-m}^{N-1} f[l] e^{-i\frac{2\pi}{N}kl}$$

$$= \sum_{n=N-m}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

したがって、

$$F[n-m] = e^{-i\frac{2\pi}{N}km} \left\{ \sum_{n=N-m}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1-m} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \right\}$$

$$= e^{-i\frac{2\pi}{N}km} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}km} F[n]$$

本日の演習問題 2

離散フーリエ変換の時間反転　$f[-n] \leftrightarrow F\left[-k\right]$ を証明せよ。

離散フーリエ変換の対称性の証明

$$F^*[k] = [F[k]]^* = \left[\sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}\right]^* = \left[\sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{i\frac{2\pi}{N}kn}\right] = F[-k]$$

なぜなら $\{ \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t) \}^* = \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)$

$$F[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-k)n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = F[-k]$$

よって　$F^*[k] = F[-k] = F[N-k]$

離散フーリエ変換の行列表記

$W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$ とおくと、$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] W_N^{kn}$ となる。

(k=0, 1, …, N-1)

$$W = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

とおくと

$$F[k] = Wf[n]$$

一方、逆離散フーリエ変換は

$$f[n] = W^{-1}F[k]$$

行列Wの特徴

$$[W]_{nk} = [W]_{kn}, \quad W = W^T, \quad W^{-1} = W^* \text{ (共役複素数)}$$

計算するためには、N^2回の乗算と$N(N-1)$の加算をする必要がある