

2018年度 第2Q

2018年7月25日

# フーリエ変換とラプラス変換

## 第13回講義資料

担当: 角嶋邦之

kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp

工学院電気電子系

# 講義予定(全15回)

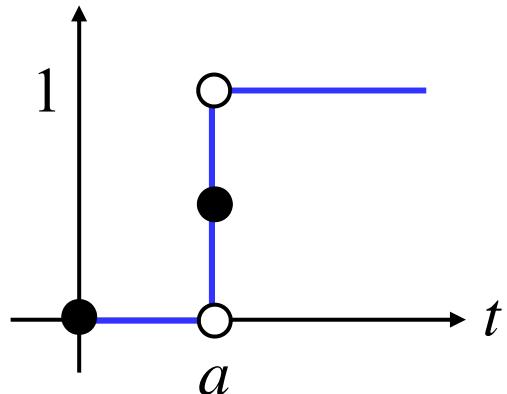
第1回	6/13	線形システムとは、周期関数の級数展開	第9回	7/11	シャノンの標本化定理
第2回	6/15	フーリエ級数の性質	第10回	7/13	離散フーリエ変換の基礎 (定義、性質)
第3回	6/20	線形回路の周期波に対する定常応答	第11回	7/18	離散フーリエ変換の実際(帯域制限、窓関数、高速フーリエ変換、応用例)
第4回	6/22	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説	第12回	7/20	0～∞上の関数とラプラス変換、ラプラス変換の性質、部分分数展開
第5回	6/27	非周期関数とフーリエ積分・フーリエ変換	第13回	7/25	ラプラス逆変換、線形回路の過渡応答
第6回	6/29	フーリエ変換の存在と性質	第14回	7/27	システムの安定性、電気電子システムへの応用、z変換
第7回	7/4	時間領域表示と周波数領域表示、線形回路の時間応答と周波数応答	第15回	8/1	講義後半の期末試験
第8回	7/6	理解度の確認と解説			

# デルタ関数 $\delta(t)$ のラプラス変換

最初に下記の関数 $U(t)$ を考える

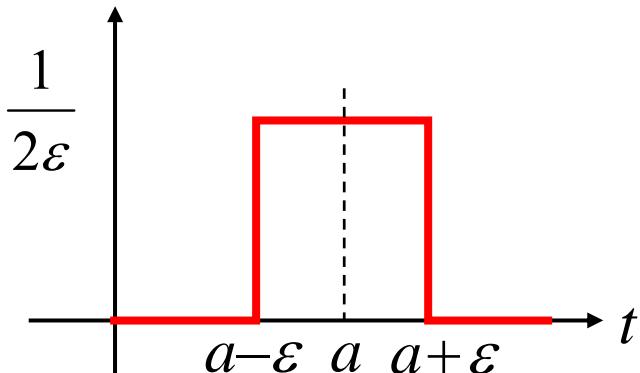
ヘヴィサイドの単位関数

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < a) \\ 1/2 & (t = a) \\ 1 & (a < t) \end{cases}$$



$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{U(t-a)\} &= \int_0^\infty U(t-a)e^{-st} dt = \int_a^\infty e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} d\tau = e^{-as} \int_0^\infty e^{-s\tau} d\tau = \frac{e^{-as}}{s}\end{aligned}$$

次に、下記の関数 $d_\varepsilon(t-a)$ を考える



$$\begin{aligned}d_\varepsilon(t-a) &= \frac{1}{2\varepsilon} [U(t-(a-\varepsilon)) - U(t-(a+\varepsilon))] \\ \mathcal{L}\{d_\varepsilon(t-a)\} &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{e^{-(a-\varepsilon)s} - e^{-(a+\varepsilon)s}}{s} \right) \\ &= \frac{e^{-as}}{2\varepsilon s} (e^{\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}) = e^{-as} \frac{\sinh(\varepsilon s)}{\varepsilon s}\end{aligned}$$

ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、 $d_\varepsilon(t-a) = \delta(t-a)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-as} \frac{\cosh(es)}{1} = e^{-as}$$

↗ ロピタルの定理

移動定理を用いると  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

# ラプラス変換におけるガンマ関数の利用

ガンマ関数の定義

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

基本的性質

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{ガウス積分に対応})$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n: \text{自然数})$$

故障発生(信頼性評価)によく用いる

$f(t) = t^x$  の関数をラプラス変換する

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty t^x e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^x} \int_0^\infty (st)^x e^{-st} dt \\ &\quad (st = \tau \text{ の置換を行う}) \\ &= \frac{1}{s^x} \int_0^\infty \tau^x e^{-\tau} \frac{1}{s} d\tau \\ &= \frac{1}{s^{x+1}} \int_0^\infty \tau^x e^{-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{s^{x+1}} \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

# 誤差関数のラプラス変換

定義  $erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$  ※正規分布を積分した累積密度関数

$$erf(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du$$

をラプラス変換する

まず、 $u^2$ のマクローリン展開

$$erf(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \left( 1 - \frac{u^2}{1!} + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \dots \right) du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( t^{\frac{1}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{t^{\frac{5}{2}}}{5 \cdot 2!} - \frac{t^{\frac{7}{2}}}{7 \cdot 3!} \dots \right)$$

$$\mathcal{L}\{erf(\sqrt{t})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{5 \cdot 2!} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{s^{\frac{7}{2}}} - \frac{1}{7 \cdot 3!} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{s^{\frac{9}{2}}} + \dots \right\}$$

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

を利用する

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \frac{1}{3} \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{s} + \frac{1}{5 \cdot 2!} \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{s^2} - \frac{1}{7 \cdot 3!} \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{s^3} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{s^3} + \dots \right) = \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \left( 1 + \frac{1}{s} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{s \sqrt{s+1}}$$

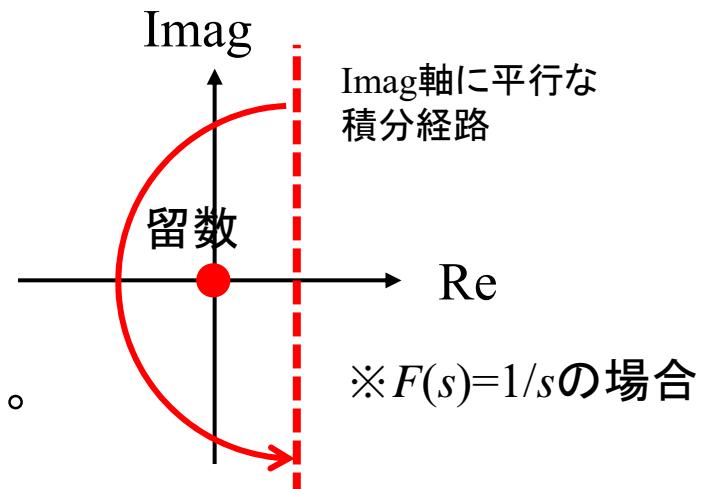
$$\boxed{(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots}$$

# ラプラス逆変換の定義

**定義**

$$f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ip}^{c+ip} F(s) e^{st} ds$$

$f(t)$ は $F(s)e^{st}$ の全ての特異点の留数の和となる。



$F(s) = \frac{1}{s}$  の場合

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{s} e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \left\{ 2\pi i \left( \text{Res}_{s=0} \left( \frac{1}{s} e^{st} \right) \right) \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} e^{st} = 1$$

$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$  の場合

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{s^2 + 1} e^{st} ds = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{s-i} e^{st} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{s+i} e^{st} ds \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \lim_{s \rightarrow i} (s-i) \cdot \frac{1}{s-i} e^{st} - \lim_{s \rightarrow -i} (s+i) \cdot \frac{1}{s+i} e^{st} \right\} \\ &= \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) = \sin t \end{aligned}$$

# 特性方程式を利用した常微分方程式の解法

変数 $t$ の区間 $[0, +\infty)$ で定義された関数 $x(t)$ の微分方程式を考える。

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t), \quad x(0) = c_0, x'(0) = c_1 \quad (a, b, c \text{ は定数}, a \neq 0)$$

補助方程式: 右辺を0とした方程式

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$$

元の式をラプラス変換して像方程式を求める

$$\begin{aligned} & a\{s^2 X - sx(0) - x'(0)\} + \\ & b\{sX - x(0)\} + cX = F(s) \\ \therefore & (as^2 + bs + c)X = ac_0 s + ac_1 + bc_0 + F(s) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H(s) = as^2 + bs + c \\ H_0(s) = ac_0 s + ac_1 + bc_0 \end{array} \right. \quad \xleftarrow{\text{特性関数という}}$$

$$X = \frac{H_0(s)}{H(s)} + \frac{F(s)}{H(s)}$$

$$x(t) = \underline{\underline{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H_0(s)}{H(s)}\right)}} + \underline{\underline{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{H(s)}\right)}}$$

補助方程式の一般解

特殊解

特性関数の特性方程式

$$H(s) = as^2 + bs + c = 0$$

異なる2つの実数解 $\lambda, \mu$ をもつとき

$$H(s) = a(s - \lambda)(s - \mu)$$

よって一般解は

$$\frac{H_0(s)}{H(s)} = \frac{1}{a(\lambda - \mu)} \left\{ \left( \frac{\lambda ac_0 + ac_1 + bc_0}{s - \lambda} - \frac{\mu ac_0 + ac_1 + bc_0}{s - \mu} \right) \right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H_0(s)}{H(s)}\right) = \frac{1}{a(\lambda - \mu)} \{ (\lambda ac_0 + ac_1 + bc_0)e^{\lambda t} - (\mu ac_0 + ac_1 + bc_0)e^{\mu t} \}$$

一般解

$H_0(s) = 1$ , つまり  $c_0 = 0, ac_1 = 1$  とすると

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{H(s)}\right) = \frac{1}{a(\lambda - \mu)} (e^{\lambda t} - e^{\mu t})$$

合成法則を用いると特殊解は以下のようになる

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{H(s)}\right) = \frac{1}{a(\lambda - \mu)} (e^{\lambda t} - e^{\mu t}) * f(t)$$

$$= \frac{1}{a(\lambda - \mu)} \int_0^t (e^{\lambda \tau} - e^{\mu \tau}) f(t - \tau) d\tau$$

特殊解

# 質点の運動

直線上を運動する質点が原点からの距離 $x$ に比例する引力(バネ)と速度に比例する抵抗、および外力を受ける場合の運動方程式は以下のように記述できる。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

質点の質量:  $m$   
抵抗の比例定数:  $R$  ( $R>0$ )  
引力の比例定数:  $k$

両辺を $m$ で割り、 $b=R/2m$ ,  $c^2=k/m$  ( $c>0$ )とおく。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + c^2 x = \frac{1}{m} f(t)$$

$$x(0)=c_0, x'(0)=c_1$$

ラプラス変換を行い、特性方程式を求める。

$$H(s) = s^2 + 2bs + c^2 = 0$$

(1)  $b>c$ の場合、解は  $-b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$

それぞれ $-\alpha, -\beta$  ( $\alpha, \beta>0$ )とおくと

$$x = \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ (ac_0 - c_1 - 2bc_0)e^{-\alpha t} - (\beta c_0 - c_1 - 2bc_0)e^{-\beta t} - (e^{-\alpha} - e^{-\beta}) * f(t) \right\}$$

または、

$$x = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} - \frac{1}{\alpha - \beta} (e^{-\alpha} - e^{-\beta}) * f(t)$$

(2)  $b=c$ の場合、解は  $-b$

$$x = \{c_0 - (bc_0 - c_1 - 2bc_0)t\}e^{-bt} + (te^{-bt}) * f(t)$$

または、

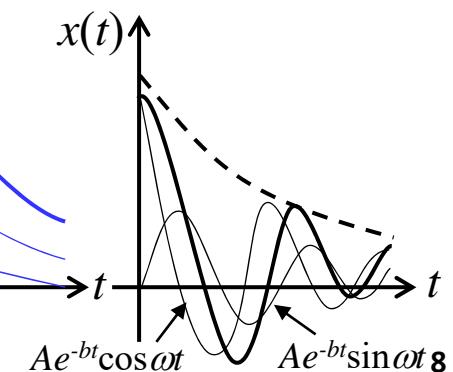
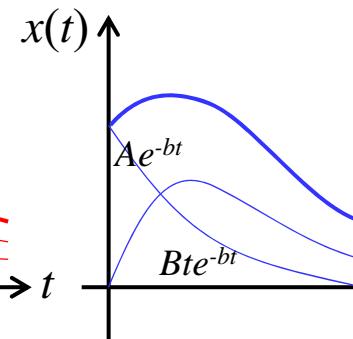
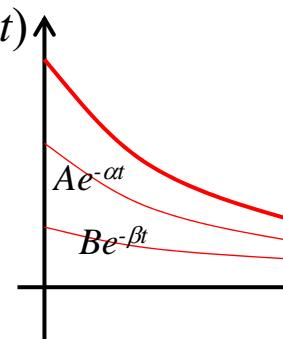
$$x = (A + Bt)e^{-bt} + (te^{-bt}) * f(t)$$

(3)  $b<c$ の場合、 $\omega = \sqrt{c^2 - b^2}$  とおくと  $-b \pm i\omega$

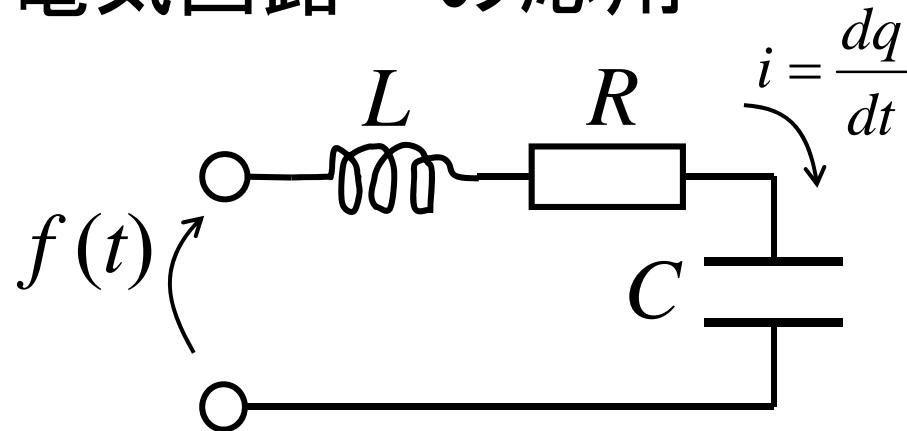
$$x = e^{-bt} \left\{ c_0 \cos \omega t - \frac{1}{\omega} (bc_0 - c_1 - 2bc_0) \sin \omega t \right\} + \frac{1}{\omega} (e^{-bt} \sin \omega t) * f(t)$$

$$x = e^{-bt} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \frac{1}{\omega} (e^{-bt} \sin \omega t) * f(t)$$

$f(t)=0$ の場合



# 電気回路への応用



$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = f(t)$$

$q$ についての微分方程式

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = f(t)$$

※質点の振動と同じ形

$q(0)=q_0, q'(0)=i(0)=i_0$  とすると  $I=sQ-q_0$

よって

$$\begin{aligned} L(sI - i_0) + RI + \frac{1}{Cs}(I + q_0) &= F \\ \therefore \left( Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) I &= Li_0 - \frac{q_0}{Cs} + F \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \left( Ls + R + \frac{1}{Cs} \right)^{-1} \quad \boxed{\text{伝達関数}} \\ I_0 = Li_0 - \frac{q_0}{Cs} \quad \text{とおくと} \quad I = WI_0 + WF \end{array} \right.$$

$f(t) = \delta(t)$  で  $I_0=0$  のとき、 $I=W$

$\mathcal{L}^{-1}(W) = w(t)$  インパルス応答

関数  $w(t)$  がわかれれば、 $i(t)$  は

$$i(t) = w * f(t) = \int_0^t w(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

# ラプラス変換を利用した過渡応答の解析

右図の回路に  $v(t)$  としてステップ入力を印加した場合の電流  $i(t)$  の過渡応答を考える

$$v = iR + \frac{1}{C} \left( \int idt + q(0) \right)$$

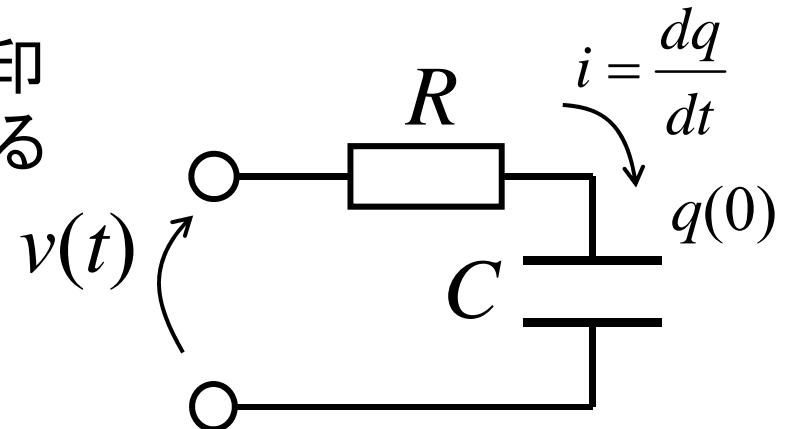
ステップ入力のラプラス変換は  $1/s$  なので  
像関数は次式になる。

$$\frac{V}{s} = IR + \frac{1}{sC} (I + q(0))$$

スライド訂正(7/26記入)

$$I = \left\{ \frac{V}{R} - \frac{q(0)}{RC} \right\} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{CR}}$$

$$i(t) = \left\{ \frac{V}{R} - \frac{q(0)}{RC} \right\} \cdot \exp\left(-\frac{1}{CR}t\right)$$



$t \rightarrow \infty$  の極限を求める  
と  
 $\exp(-t)$  より  $i(\infty) = 0$

最終値定理を用いても同じ答え

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sI(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s + 1/CR} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sCR = 0 \end{aligned}$$

次のページで説明

# 初期値定理、最終値定理の証明

微分法則

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

初期値定理

$$f(0) = sF(s) - \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$s \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = 0 \quad \text{なので}$$

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

最終値定理

$s \rightarrow 0$  の極限をとると

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

$$\int_{f(0)}^{f(\infty)} df(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

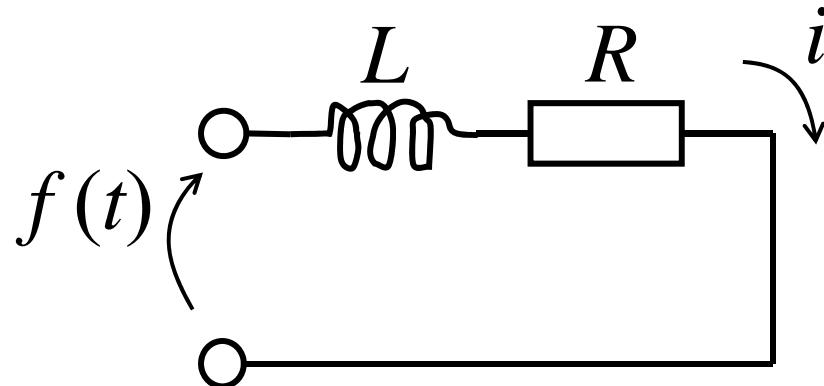
$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

$$\therefore f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

# 本日の演習問題 1

右図の電気回路を考える。  
流れる電流  $i(t)$  を求めよ。  
但し、 $i(0)=0$  とする。

(1)  $f(t) = \delta(t)$  の場合



(2)  $f(t) = E_0 \sin \omega t$  の場合

# 線形システムとブロック線図

あるシステムの入力  $f(t)$  と出力  $x(t)$  の間の伝達関数を  $T(f(t))=x(t)$  と表すとき

$$T(\lambda f(t)) = \lambda x(t)$$

$$T(f_1(t) + f_2(t)) = x_1(t) + x_2(t)$$

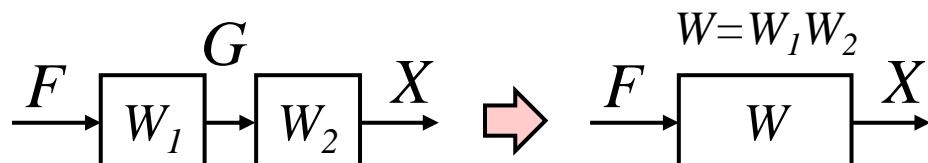
の2条件がなりたつならば、線形システムである

## 伝達関数とブロック線図



インパルス入力  $\delta(t)$ 、は  $F(s)=1$  のため  
X=Wとなる。Wを伝達関数と呼ぶ。

## ブロック線図の等価交換

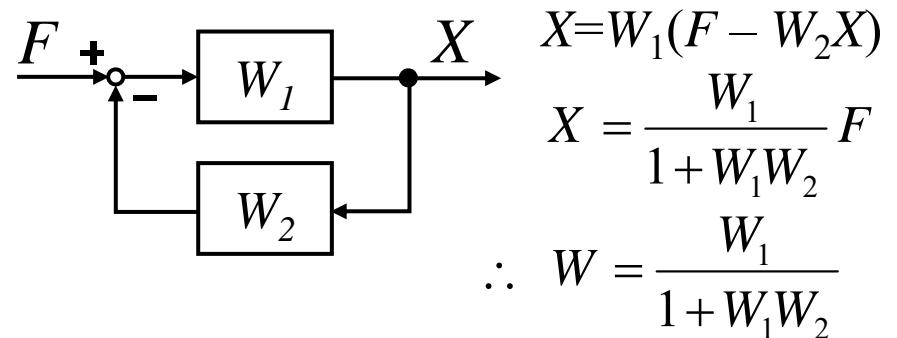


証明

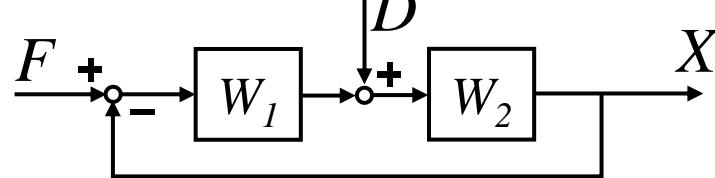
$$G = W_1 F, \quad X = W_2 G$$

$$\therefore X = W_2 W_1 F \quad \therefore X = WF$$

## ■ フィードバック・システムの伝達関数W



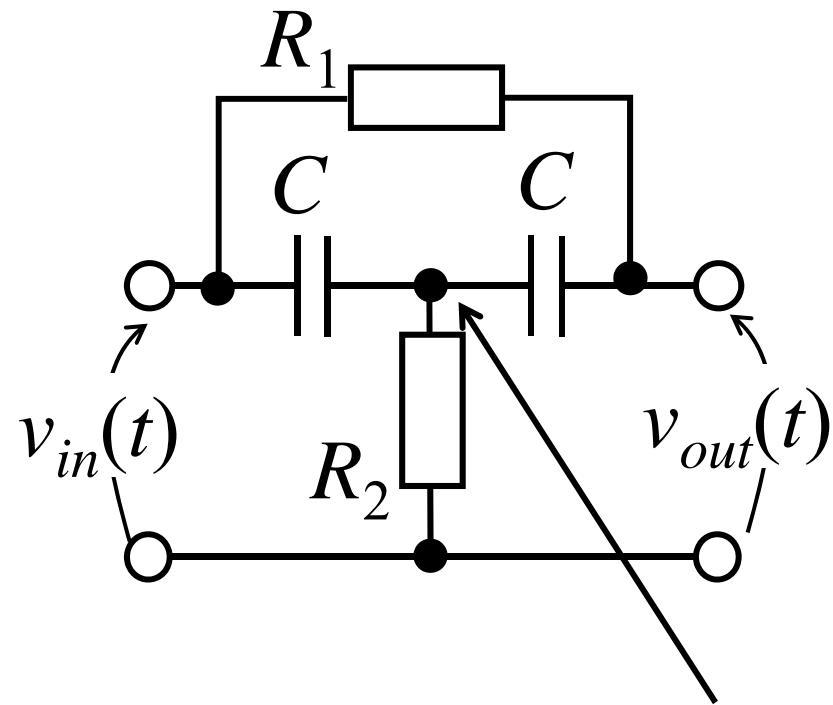
## ■ 外乱 $d(t)$ を含んだシステム ( $D = \mathcal{L}(d(t))$ )



$$X = W_2 \{ W_1(F - X) + D \}$$

$$\therefore X = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2} F + \frac{W_2}{1 + W_1 W_2} D$$

## 本日の演習問題 2



(3) 左図の回路のブロック線図を描け。

ヒント: この点の電位を $v_a(t)$ とする