13. 連立定係数1階線形方程式

目標

- 未知関数の1つを消去する方法で解ける
- 行列の対角化を利用した方法で解ける
- 固有値・固有ベクトルを使用した方法で解ける

13.1　連立定係数1階線形方程式

- 独立変数をx, 未知関数をy_1, y_2とする次の連立定係数1階線形方程式を考える。

$$y_1' = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + q_1 \qquad (13.1)$$

$$y_2' = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + q_2 \qquad (13.2)$$

  – ここで、$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ は定数、q_1, q_2 はxの関数(非斉次項)である。

13.2 未知関数の1つを消去する方法

- 式(13.1)より、
$$y_2 = \frac{1}{A_{12}}\left(y_1' - A_{11}y_1 - q_1\right)$$
さらにxで微分すれば
$$y_2' = \frac{1}{A_{12}}\left(y_1'' - A_{11}y_1' - q_1'\right)$$
となる。これらを式(13.2)に代入すると
$$\frac{1}{A_{12}}\left(y_1'' - A_{11}y_1' - q_1'\right) = A_{21}y_1 + \frac{A_{22}}{A_{12}}\left(y_1' - A_{11}y_1 - q_1\right) + q_2$$
この式を整理すると
$$y_1'' - A_{11}y_1' - q_1' = A_{12}A_{21}y_1 + A_{22}\left(y_1' - A_{11}y_1 - q_1\right) + A_{12}q_2$$

- すなわち

$$y_1'' - \left(A_{11} + A_{22}\right) y_1' + \left(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}\right) y_1 = q_1' - A_{22}q_1 + A_{12}q_2 \tag{13.3}$$

となり、y_1に関する2階定係数線形非斉次方程式が得られる。

- この微分方程式(13.3)を解きy_1を求め、その後式(13.1)へ代入するとy_2が得られる。
- ちなみに、(13.3)の左辺、すなわち斉次項は

$$y_1'' - \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{A}\right) y_1' + \det\left(\boldsymbol{A}\right) y_1 = 0 \quad (\#)$$

となっている。もちろん、

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ であり、Trはトレース、detは行列式。

補足　ケーリー・ハミルトンの定理

- 式(#) は、2 × 2行列のケーリー・ハミルトンの定理の式に似ていることにお気づきだろうか。

$$y_1'' - \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{A}\right) y_1' + \det\left(\boldsymbol{A}\right) y_1 = 0$$

  - 仮に、$y_1 = \exp(\lambda t)$の形を仮定して(13.1)式に代入すると、 $\lambda^2 - \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{A}\right)\lambda + \det\left(\boldsymbol{A}\right) = 0$
  - となっているわけであり、ケーリーハミルトンの定理から、この λが行列$\boldsymbol{A}$の固有方程式の解、すなわち行列$\boldsymbol{A}$の固有値であることを示している。
    - 後でもう少し補足する。

例題13.1　次の連立定係数1階線形方程式を、未知関数の1つを消去する方法で解く。

$$y_1' = 2y_1 - y_2 + \exp(-x) \quad (13.4)$$

$$y_2' = 4y_1 - 3y_2 + \exp(-x)$$

(解)

- $A_{11} = 2, A_{12} = -1, A_{21} = 4, A_{22} = -3$, $q_1 = q_2 = \exp(-x)$ となる。よって微分方程式(13.3)は以下のようになる。

$$y_1'' - (2-3)y_1' + \{2\cdot(-3) - (-1)\cdot 4\}y_1$$

$$= \{\exp(-x)\}' - [-3\{\exp(-x)\}] + [-1\{\exp(-x)\}]$$

例題13.1　つづき

- すなわち　$y_1'' + y_1' - 2y_1 = \exp(-x)$
- この微分方程式は例題9.1(2)と同じ形である。その一般解は例題を参照し

$$y_1 = -\frac{1}{2}\exp(-x) + C_1\exp(-2x) + C_2\exp x$$

- となる。これを式(13.4)に代入して

$$\begin{aligned} y_2 &= 2y_1 - y_1' + \exp(-x) \\ &= 2\left\{-\frac{1}{2}\exp(-x) + C_1\exp(-2x) + C_2\exp x\right\} \\ &\quad -\left\{\frac{1}{2}\exp(-x) - 2C_1\exp(-2x) + C_2\exp x\right\} + \exp(-x) \end{aligned}$$

例題13.1　さらにつづき

- すなわち

$$y_2 = -\frac{1}{2}\exp\left(-x\right) + 4C_1 \exp\left(-2x\right) + C_2 \exp x$$

- となる。

13.3 行列を使用した方法

- 連立方程式(13.1), (13.2)を行列を使って表すと以下のようになる。

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{q} \qquad (13.5)$$

- ここで $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

- また、 $\boldsymbol{y}' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$

(1) 2つの固有値が異なる場合

Eigenvalue

- 行列$\boldsymbol{A}$の固有値が異なる2つの値B_1, B_2であるとし、それぞれに対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$とする。

Eigenvector

- これらを列ベクトルとする行列$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2]$を作る。
  - 異なる固有値に属する固有ベクトルは1次独立
- 従って行列$\boldsymbol{P}$は正則行列で、逆行列$\boldsymbol{P}^{-1}$が存在する。

行列の対角化

Diagonalization of matrix

- ここで行列$\boldsymbol{A}$に対して、$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$を計算すると、次のように対角化できる。

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

- (13.5)の両辺に$\boldsymbol{P}^{-1}$を掛け
- また$\boldsymbol{PP}^{-1} = \boldsymbol{I}$ (単位行列)となることを用いると

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{y}\right)' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{PP}^{-1}\right)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{q}$$ すなわち

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{y}\right)' = \left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\right)\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{y}\right) + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{q}$$ となる。

- ここで　$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$とすると

$$\boldsymbol{z}' = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} + \boldsymbol{r}$$

- となる。すなわち　$z_1' = B_1 z_1 + r_1$

$$z_2' = B_2 z_2 + r_2$$

となって、独立した2つの1階定係数線形非斉次方程式が得られる。

- これを解くと$\boldsymbol{z}$が得られ、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$より式(13.5)を解くことができる。

例題13.2　次の連立定係数1階線形方程式を、行列を使用した方法で解く(参照　例題13.1)。

$$y_1' = 2y_1 - y_2 + \exp(-x)$$

$$y_2' = 4y_1 - 3y_2 + \exp(-x)$$

(解)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \exp(-x) \\ \exp(-x) \end{bmatrix}$$ となる。

Secular equation

- まず、行列$\boldsymbol{A}$の固有値λを求める。固有方程式(別名永年方程式)は $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) - (-1)\cdot 4$

$= \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1) = 0$　より、$B_1 = -2,\ B_2 = 1.$

固有値と固有ベクトルを求める

- $B_1 = -2$に対する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2-B_1 & -1 \\ 4 & -3-B_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = 0$$

より、規格化せずに示せば、例えば

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$ となる。

- $B_2 = 1$に対しては

$$\begin{bmatrix} 2-B_2 & -1 \\ 4 & -3-B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = 0$$

これより $\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- よって、正則行列$\boldsymbol{P}$は

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

- この逆行列$\boldsymbol{P}^{-1}$は

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{1\cdot 1-1\cdot 4}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

- また、

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{q}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\exp(-x)\\ \exp(-x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \exp(-x)\end{bmatrix}$$

- よって、式(13.6)は

$$z_1{}'=-2z_1, \qquad (13.7)$$

$$z_2{}'=z_2+\exp(-x) \qquad (13.8)$$

と、独立した2つの1階定係数線形非斉次方程式となった。

- 微分方程式(13.7)-(13.8)の一般解は

$$z_1 = C_1 \exp\left(-2x\right),\ \ z_2 = C_2 \exp x - \frac{1}{2}\exp\left(-x\right)$$

- である。ここでC_1, C_2は任意定数である。
- よって、

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \exp\left(-2x\right) \\ C_2 \exp x - \frac{1}{2}\exp\left(-x\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\exp\left(-x\right) + C_1 \exp\left(-2x\right) + C_2 \exp x \\ -\frac{1}{2}\exp\left(-x\right) + 4C_1 \exp\left(-2x\right) + C_2 \exp x \end{bmatrix}$$

- となり、例題13.1と同一の結果を得る。

(2) 固有値が重解で狭義固有ベクトルが1つしかない場合

- 行列Aの固有値が重解として1つの値Bで、かつ狭義固有ベクトルが1つしかない場合は、行列Aは対角化できない。
- この時は $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 1 & B \end{bmatrix}$ を満たすように正則行列$\boldsymbol{P}$を決める。
  - 式(13.6)に相当する式は $\boldsymbol{z}' = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 1 & B \end{bmatrix}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{r}$ (13.9)
  - すなわち $z_1' = Bz_1 + r_1$

$$z_2' = z_1 + Bz_2 + r_2 \qquad (13.10)$$

Jordanの標準形となる場合

- となる。
- まず、微分方程式(13.9)を解き、z_1を求めた後、式(13.10)へ代入する。
- そして、微分方程式(13.10)を解き、z_2を求める。
- その後、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$より、式(13.5)を解くことができる。

13.A 補足　固有値固有ベクトルを使ってn次元に拡張

- ここまでの議論では、連立といっても2元
- 実際の工業応用では、多数の未知関数が現れる。
  - また、線形代数を応用した解き方としても、13.2 - 13.3では不足。
- もっと一般的なn元の定係数連立線形常微分方程式の解法を理解する。

13.A1 準備

- 本節では、記号の取り方をここまでと少し変えて、t を独立変数として、未知関数を $x_1(t)$; $x_2(t), \ldots, x_n(t)$ とする。
- $y = y(t)$ に対するn 階の常微分方程式が、
  $y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

と与えられているとする。

– このとき $y = x_1, y' = x_2, \ldots, y^{(n-1)} = x_n$ とおくと、

$x_1' = x_2, x_2' = x_3, \ldots, x_{n-1}' = x_n,$

$x_n' = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

連立の場合、1階微分のみ考えれば十分

- すなわち、高階微分方程式（系）は、未知関数を適当に増やすことによって、必ず1 階の微分方程式系に帰着されることとなる。
  - 以下、「連立」とはいわず、「方程式系」と記す。

- したがって、微分方程式系の一般論を検討する際、1階のみ考えれば良い。

- t を独立変数とし、未知関数を$x_1, x_2, \ldots, x_n$とする。

$$x_1' = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$x_2' = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

とする。右辺が問題として与えられているとする。

- 次のような n次元ベクトル値関数$\boldsymbol{x}(t)$等を導入する。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{pmatrix}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_{1n}(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

13A.2 線形1 階微分方程式系

- これらの導入により、1 階微分方程式系を以下のように書くことができる。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$$

- ここでは問題を線形に限る。
  - 線形とは、「$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ が$\boldsymbol{x}$ について線形」ということ
  - 即ち　$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$
    - ここに、$\boldsymbol{A}(t)$はn 次の正方行列、また $\boldsymbol{b}(t)$はn 次の縦ベクトルで、各成分はtの関数である。

斉次と非斉次

- ここまでの議論と同様、$\boldsymbol{b}(t)=0$ の型の方程式系

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad (13\mathrm{A}.1)$$

を、斉次方程式系、$\boldsymbol{b}(t)\neq 0$すなわち

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t) \qquad (13\mathrm{A}.2)$$

を非斉次方程式系という。

– (13A.2)の解を$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$とし、その差を$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$とすると、$\boldsymbol{y}$ は(13A.1)の解となっている。

初期条件

- したがって、**非斉次一般解＝斉次一般解＋非斉次特殊解**という今までの議論が同様に通用する。
- 初期条件として、 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$
- (13A.2)に対して、n 個の解$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が与えられているとすると、線形性から、その１次結合

$$\boldsymbol{x} = C_1\boldsymbol{x}_1 + C_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + C_n\boldsymbol{x}_n$$

も(13A.2) の解

– 以下の課題は初期条件を満たすように係数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を決定すること。

1次独立性

- 係数$C_1, C_2, \cdots, C_n$ の決定のためには、

$$C_1\boldsymbol{x}_1(0)+C_2\boldsymbol{x}_2(0)+\cdots+C_n\boldsymbol{x}_n(0)=\boldsymbol{x}_0$$

をn本の連立方程式とみなして解けば良い。

  - 従って、$C_1, \cdots, C_n$が一意に求められるための必要十分条件は $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1(0) & \cdots & \boldsymbol{x}_n(0) \end{vmatrix} \neq 0$
  - 1次独立な解をn個もとめねばならない

- 独立性は、ロンスキアンを求めれば検討できる。

1階線形系の場合のロンスキアン

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が、斉次微分方程式$\boldsymbol{x}_i' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i$ の解であるとき、n次の正方行列 $\boldsymbol{X}(t) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$

の行列式 $|\boldsymbol{X}(t)| = \det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = W(t)$ (13A.3)

をロンスキアンという。

- なお、常微分方程式系のロンスキアンに対して、$W'(t) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \cdot W(t)$ が成立する。
  - 証明略, $W(t)$は指数関数×定数の解を持つ。
  - 1点でゼロなら定義域全てでゼロ、1点でゼロでないなら決してゼロにならない。
  - 初期条件のみで$W(t)$がゼロか否かを判断できる。

ロンスキアンと1次独立性

- ある t において $W(t) \neq 0$ ならば、解として得られている $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は $^\forall t$ において一次独立

- 一次独立な n 個の解を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ とするとき、$^\forall t = t_0$ における任意の初期条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ を満たす解 $\boldsymbol{x}$ は、$C_1\boldsymbol{x}_1 + C_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + C_n\boldsymbol{x}_n$ と表される。

13A.3 非斉次方程式の特殊解の求め方

- 1 階線形非斉次微分方程式系の特殊解を求める方法であるLagrange の「定数変化法」について述べる。
- n次の1 階非斉次線形微分方程式系

$$\boldsymbol{x}(t)' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \qquad (13A.4)$$

が与えられたとする。対応する斉次方程式系は

$$\boldsymbol{x}(t)' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \qquad (13A.5)$$

で、その1次独立な一般解を既知とし、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$とする。ここで、(13A.4)の特殊解を

Lagrangeの定数変化法

- $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} = c_1(t)\boldsymbol{x}_1(t) + \cdots + c_n(t)\boldsymbol{x}_n(t) = \boldsymbol{X}(t)\,\boldsymbol{c}(t)$ (13A.6)

  とおく。ただし、

  $\boldsymbol{X}(t) = (\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)),$

  $$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$$

  である。

  – $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ は(13A.5)の解であるから、

  $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ でもある。このとき、(13A.6)を微分すると、

  $$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{X}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{c}' \qquad (13\mathrm{A}.7)$$

  となる。

- 一方、$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}'$について、(13A.4)の解であるから、$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{b}$ は明らかである。これが(13A.7)に等しいので

$$\boldsymbol{AXc} + \boldsymbol{Xc}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{b} \qquad (13\mathrm{A}.8)$$

- さらに(13A.6)も参照すれば$\boldsymbol{Xc} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$ であるから(13A.8)から

$$\boldsymbol{Xc}' = \boldsymbol{b}$$

- よって　$\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{b}$　　($\boldsymbol{X}$は$\boldsymbol{x}_i$ の1次独立性から正則)

- これからベクトル値関数$\boldsymbol{c}$は以下となる

$$\boldsymbol{c} = \int \boldsymbol{X}\left(t\right)^{-1} \boldsymbol{b}\left(t\right) \mathrm{d}t$$

- したがって $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{X}\left(t\right) \cdot \int \boldsymbol{X}\left(t\right)^{-1} \boldsymbol{b}\left(t\right) \mathrm{d}t$

  と特殊解が求められた。

- 式(13A.4)の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\left(t\right) \cdot \int \boldsymbol{X}\left(t\right)^{-1} \boldsymbol{b}\left(t\right) \mathrm{d}t + \boldsymbol{X}\left(t\right) \cdot \boldsymbol{C}$$

となる。ただし

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

である。

13A.4 定係数斉次線形常微分方程式系の基本解

- 次に斉次方程式の基本解をまとめる。
- ここでは、定係数に話を限る。

$$\boldsymbol{x}(t)' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \qquad (13A.9)$$

$\boldsymbol{A}$は、tに依存しない。

- 解の形として

$$\boldsymbol{x} = \exp(\lambda t)\boldsymbol{q}$$

ただし $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ 定数ベクトル

の形を仮定して(13A.9)に代入

– その結果

$$\boldsymbol{x}' = \lambda\exp(\lambda t)\,\boldsymbol{q} = \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

- よって　　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$

  となる。すなわち、λ が行列$\boldsymbol{A}$ の固有値ならば、$\exp(\lambda t)\boldsymbol{q}$　は1つの解を与える。
- これを再度(13A.9)に代入すると

  $\boldsymbol{A}\exp(\lambda t)\boldsymbol{q} = \lambda\exp(\lambda t)\boldsymbol{q}$　すなわち$\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \lambda \boldsymbol{q}$

  となるので、$\boldsymbol{q}$は固有値λに属する固有ベクトルとなる。
- すなわち、定係数斉次線形常微分方程式系の場合、係数行列$\boldsymbol{A}$ の固有値λ、固有ベクトル$\boldsymbol{q}$を求め、$\exp(\lambda t)\boldsymbol{q}$をうることが方針となる。

固有値・固有ベクトルの性質で場合分け

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が相異なる実固有値の場合

- この場合、それぞれの固有値に対応する固有ベクトル$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ は1次独立

- 基本解は

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \exp(\lambda_1 t)\, \boldsymbol{q}_1,$$
$$\boldsymbol{x}_2(t) = \exp(\lambda_2 t)\, \boldsymbol{q}_2,$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{x}_n(t) = \exp(\lambda_n t)\, \boldsymbol{q}_n$$

(2) λ が複素固有値の場合

- $\lambda = \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0)$
- 対応する固有ベクトル$\boldsymbol{q}$が

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 + i\boldsymbol{q}_2 \qquad (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in \mathbf{R}^n \text{ 実ベクトル})$$

であるとする。解は

$$\exp(\lambda t)\boldsymbol{q} = \exp(\alpha t)\,(\cos\beta t + i\sin\beta t)\,(\boldsymbol{q}_1 + i\boldsymbol{q}_2)$$

$$= \exp(\alpha t)\,(\boldsymbol{q}_1\cos\beta t - \boldsymbol{q}_2\sin\beta t)$$

$$+ i\exp(\alpha t)\,(\boldsymbol{q}_1\sin\beta t + \boldsymbol{q}_2\cos\beta t)$$

と与えられる。実数の基本解は

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}} = \exp(\alpha t)\,(\cos\beta t\cdot\boldsymbol{q}_1 - \sin\beta t\cdot\boldsymbol{q}_2)$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}} = \exp(\alpha t)\,(\sin\beta t\cdot\boldsymbol{q}_1 + \cos\beta t\cdot\boldsymbol{q}_2)$$

(3) 固有値$\lambda(\in \mathbf{R})$ が重解だが、対応する2つの1次独立な(狭義)固有ベクトル$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ がある場合

- 固有値が重解でも、以前の高階常微分方程式とは若干異なる場合である。

- すなわち、1次独立な固有ベクトルが重複度と同じく存在するような場合である。

$$\boldsymbol{x}_1 = \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{x}_2 = \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_2$$

は、1次独立な基本解を与える。

(4) 固有値 $\lambda(\in \mathbf{R})$ が重解で、狭義固有ベクトルが1つしかない場合

- この時、行列Aは対角化できない。
  - Jordanの標準形にまでは変形可能
- ユニタリー行列Pを用いて

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_m(\lambda) \end{pmatrix}$$

と変形される。

- $J(\lambda)$はJordanの標準形で

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (13A.10)$$

広義の固有ベクトル

- 係数行列$\boldsymbol{A}$が(13A.10)と変形される場合についてまとめる。ただし、 $\boldsymbol{A}$はr次の正方行列であるとする。
- 狭義の固有ベクトルはただ一つ、$\boldsymbol{q}_1$,
- 位数lの広義固有ベクトルを$\boldsymbol{q}_l$とする。
  - 広義固有ベクトルの性質から

$$(\boldsymbol{A} - \lambda)\,\boldsymbol{q}_1 = 0$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda)\,\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_1$$

$$\vdots$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda)\,\boldsymbol{q}_r = \boldsymbol{q}_{r-1}$$

となる。

- 線形代数で学んだ通り、$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_r$ は一次独立
- まず、$\boldsymbol{x}_1 = \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1$ は1つの基本解
- 次に、$\boldsymbol{x}_2 = t \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1 + \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_2$ は2つ目の基本解
  - なぜなら $\boldsymbol{x}_2' = \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1 + \lambda t \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1 + \lambda \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_2$

    一方 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda t \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1 + \exp(\lambda t)\, (\boldsymbol{q}_1 + \lambda \boldsymbol{q}_2)$

    よって $\boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$
- 以下同様に、

$$\boldsymbol{x}_r = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda t} \boldsymbol{q}_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} e^{\lambda t} \boldsymbol{q}_2 + \cdots + e^{\lambda t} \boldsymbol{q}_r$$

- と、一次独立な解の組$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$が得られる。

まとめ:本日の確認事項

- 連立線形微分方程式を未知関数の1つを消去する方法で解ける
- 行列の対角化を利用した方法で解ける
- 固有値・固有ベクトルを使用した方法で解ける