解析学演習　微分方程式(第 12 回)　解答例　　2018/5/24

1．(1) [2 点]　$p(x)=1$，$q(x)=x+1$の場合である。よって，

$$y=\exp\left(-\int \mathrm{d}x\right)\int\left\{(x+1)\exp\left(\int \mathrm{d}x\right)\right\}+C\exp\left(-\int \mathrm{d}x\right)$$

$$=\exp(-x)\int(x+1)\exp x\,\mathrm{d}x+C\exp(-x)$$

$$=\exp(-x)\left\{(x+1)\exp x-\int \exp x\,\mathrm{d}x\right\}+C\exp(-x)$$

$$=\exp(-x)x\exp x+C\exp(-x)=x+C\exp(-x)$$

となる。よって特殊解は $y=x$ である。

(2) [2 点]　特殊解を 1 次関数 $y_{\mathrm{s}}=Ax+B$とおく。ここで，A, B は定数である。 $y_{\mathrm{s}}'=A$と一緒に微分方程式へ代入すると，$y_{\mathrm{s}}'+y_{\mathrm{s}}=(Ax+B)+A=Ax+(A+B)=x+1$となり，係数を比較すると $A=1, A+B=1$ が得られる。これを解くと，$A=1, B=0$ となる。すなわち，特殊解は $y_{\mathrm{s}}=Ax+B=x$ となる。

2．(1) [2 点]　斉次方程式 $y''-2y'+y=0$の 2 つの基本解は，$y_1=x\exp x$と $y_2=\exp x$である。ロンスキャン wは，

$$w=\begin{vmatrix} x\exp x & \exp x \\ (x+1)\exp x & \exp x \end{vmatrix}=x\exp(2x)-(x+1)\exp(2x)=-\exp(2x)$$

となる。さて、$r(x)=\exp(-x)$であるので，

$$-y_1\int\frac{r(x)y_2}{w}\mathrm{d}x=-x\exp x\int\frac{\exp(-x)\exp x}{-\exp(2x)}\mathrm{d}x=x\exp x\int\exp(-2x)\mathrm{d}x$$

$$=x\exp x\left\{-\frac{1}{2}\exp(-2x)+C_1\right\}=-\frac{1}{2}x\exp(-x)+C_1x\exp x$$

$$y_2\int\frac{r(x)y_1}{w}\mathrm{d}x=\exp x\int\frac{\exp(-x)x\exp x}{-\exp(2x)}\mathrm{d}x=-\exp x\int x\exp(-2x)\mathrm{d}x$$

$$= -\exp x\left\{-\frac{1}{2}x\exp\left(-2x\right)-\frac{1}{4}\exp\left(-2x\right)+C_{20}\right\}=\frac{1}{2}x\exp\left(-x\right)+\frac{1}{4}\exp\left(-x\right)-C_{20}\exp x$$

したがって，一般解は

$$y=\left\{-\frac{1}{2}x\exp\left(-x\right)+C_1x\exp x\right\}+\left\{\frac{1}{2}x\exp\left(-x\right)+\frac{1}{4}\exp\left(-x\right)-C_{20}\exp x\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\exp\left(-x\right)+C_1x\exp x-C_{20}\exp x=\frac{1}{4}\exp\left(-x\right)+C_1x\exp x+C_2\exp x$$

となる。ただし、$C_2 = \ C_{20}$ とおいた。すなわち、特殊解は $y_s=\frac{1}{4}\exp\left(-x\right)$ となる。

(2) [2 点]　基本解が $x\exp x$，$\exp x$ で、非斉次項が $\exp\left(-x\right)$ であるので、特殊解を指数関数 $y_s=A\exp\left(-x\right)$ とおく。ここで、A は定数である。 $y_s'=-A\exp\left(-x\right),\ y_s''=A\exp\left(-x\right)$ とともに微分方程式に代入すると、$A\exp\left(-x\right)+2A\exp\left(-x\right)+A\exp\left(-x\right)=4A\exp\left(-x\right)=\exp\left(-x\right)$ となる。係数を比較すると、$4A = 1$ より $A=\frac{1}{4}$ となる。すなわち、特殊解は $y_s=\frac{1}{4}\exp\left(-x\right)$ となる。

3. この方程式は、２階定数係数非斉次線形常微分方程式である。そこで、まず、対応する斉次方程式　$y'' + y' = 0$ の一般解を求める。特性方程式は $\lambda^2 + \lambda = 0$ となり、この根は $\lambda = 0, -1$ である。従って、対応する斉次方程式の一般解は $y = C_1 + C_2\exp(-x)$ となる。次に、非斉次の特殊解を求める。右辺の非斉次項が 2 次の多項式、左辺の最低階が 1 階微分であることから、特殊解を $y = Ax^3 + Bx^2 + Dx$ と仮定して与式に代入すると、$y' = 3Ax^2 + 2Bx + D, y'' = 6Ax + 2B$ であるから左辺 $= 3Ax^2 + 2Bx + D + (6Ax + 2B) = x^2 + x + 1$ が恒等的に成立することが必要十分となる。各項の係数を比較すると、$3A = 1, 2B + 6A = 1, 2B + D = 1$ となり、従って、$A = 1/3, B = -1/2, D = 2$ をうる。よって、特殊解の一つとして、$y = (1/3)x^3 - (1/2)x^2 + 2x$ をうることができた。よって、$y'' + y' = x^2 + x + 1$ の一般解は、

$$y = C_1 + C_2\exp(-x) + (1/3)x^3 - (1/2)x^2 + 2x$$

となる。