解析学　理解度の確認（２）解答例

問題 1.

(1)　コーシーの積分定理を述べよ．(配点：5 点＋α(証明))

(解答例)

関数 $f(z)$が正則な領域内に存在する単一閉曲線 C に対して，$\int_C f(z)dz = 0$　が成り立つ．

(下記でもＯＫ)
単一閉曲線 C の上とその内部で $f(z)$が正則であるとき，$\int_C f(z)dz = 0$　が成り立つ．

(2) コーシーの積分公式の導出について，次の問いに答えよ．

(a)　複素平面上の点 z_0 を中心とする半径 r の円を積分路 C: $|z-z_0|=r$ $(r>0)$ とするとき，積分路 C を，媒介変数を用いて式で示せ．(配点：5 点)

(解答例)

$$C:\ z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}\quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

ただし，媒介変数を θ とした．

(b)　閉曲線 C とその内部を含む領域で関数 $f(z)$が正則であるとき，(a)の積分路 C で $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ を計算し，最後に $r \to 0$ とすることで，その値を z_0, $f(z)$等を用いて式で示せ．(配点：10 点)

(解答例)

$z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}\quad (0 \le \theta \le 2\pi)$　より，$dz = ire^{i\theta}d\theta$

よって積分変数 z を θ に変数変換して，積分路 C に沿った周回積分を実行すると，

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

ここで $r \to 0$ の極限を取ると

$$\lim_{r\to 0}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \lim_{r\to 0} i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta = i\int_0^{2\pi} f(z_0)d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

ここで $f(z_0)$は積分変数 θ によらない定数だから積分の外に出した．
よって　$2\pi i f(z_0)$　(答)

問題 2.

(1)　関数 $f(z)=\bar{z}$ を,点 0 から点 1+i まで下に示す積分路に沿って複素積分せよ.

(a)　積分路 C_a：点 0 と点 1+i を結ぶ線分　(配点：5 点)

(解答例 1)　*xy* 直交座標で媒介変数 *t* を用いて直線を表す方法

媒介変数を t とおくと，$x=t, y=t \Leftrightarrow z = x + iy = (1+i)t \Leftrightarrow$

$z(t)=(1+i)t \quad (0 \le t \le 1)$　よって　$dz=(1+i)dt$.

また，　$f(z)=\bar{z}=(1-i)t$　なので,

$$\int_{C_a} f(z)dz=\int_0^1 (1-i)t(1+i)dt=\int_0^1 2tdt=\left[t^2\right]_0^1=1$$

(解答例 2) 極表示を用いて表す方法

極表示 $z=re^{i\theta}$　を用いて $z=0 \rightarrow 1+i$ の線分を表すと, $\theta=\pi/4$ と固定して,

$r: 0 \rightarrow \sqrt{2}$ と考えればよい．すなわち，$z(r)=re^{i\frac{\pi}{4}} \ (0 \le r \le \sqrt{2})$

よって　$dz=e^{i\frac{\pi}{4}}dr$.　また，　$f(z)=\bar{z}=re^{-i\frac{\pi}{4}}$ なので,

$$\int_{C_a} f(z)dz=\int_0^{\sqrt{2}} re^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}dr=\int_0^{\sqrt{2}} rdr=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}}=1$$

(b)　積分路 C_b：円$|z-1|=1$ の周上を，点 0 から上方へ出発して右回りに 1+i まで

(解答例)

円$|z-1|=1$ の周上の点 z を，媒介変数 θ で表すと，$z(\theta)=1+e^{i\theta}$.

点 0 から上方へ出発して右回りに 1+i までの経路を θ で表すと，θ ：$\pi \rightarrow \pi/2$ に相当する.

$dz=ie^{i\theta}d\theta$　であるから，求める線積分は，$f(z)=\bar{z}=1+e^{-i\theta}$ に注意して

$$\int_{C_b} f(z)dz=\int_\pi^{\pi/2}(1+e^{-i\theta})ie^{i\theta}d\theta=\int_\pi^{\pi/2}\left(ie^{i\theta}+i\right)d\theta=\left[e^{i\theta}+i\theta\right]_\pi^{\pi/2}$$

$$=i+i\frac{\pi}{2}-(-1+i\pi)=1+i(1-\frac{\pi}{2})$$

積分路によって積分値が異なるのは，$\bar{z}$ が正則ではないため.

(2)　$f(z)=\dfrac{1}{z}$ を，中心 $z=-1$ でテーラー展開し，続いて収束半径を求めよ．(配点：10 点)

(解答例)

テーラー展開の式を使っても求められる(※)が，ここでは等比級数の式を使った方法を示す．

中心 $z=-1$ であることから，$(z+1)$を公比 r とする等比級数を構成しようと考える．

$f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{-1+(z+1)}=-\dfrac{1}{1-(z+1)}$　ここに等比級数の式 $\dfrac{1}{1-r}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n$ を適用すると

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n$$

等比級数が収束するための条件は $|r|<1$ ⇔ $|z+1|<1$ より収束半径は 1

(※)もちろんテーラー展開の公式を適用しても同じ答えになるが，係数を正しく計算できていない答案が意外に多いので注意

(3)　$f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ を，$z=1$ を中心として，$|z-1|>2$ の範囲でべき級数展開せよ．

(配点：10 点)

(解答例)

$z=1$ を中心とする収束半径=2 の収束円の「外側」で収束するような級数を構成しなさいという問題．特異点を中心とする展開なので，最終結果はテーラー展開の形ではなく，ローラン展開の形になることがあらかじめ予想できる．以下に等比級数の式を使った解法を示す．

$|z-1|>2$ の条件から，両辺の逆数を取って 2 倍すると，$\Leftrightarrow \left|\dfrac{2}{z-1}\right|<1$

よって $2/(z-1)$を「公比」とする等比数列の和(の極限=$1/(1+r)$)を引き出そうと考える．

$z=1$ を中心とした展開を考えているから，最後には$(z-1)$のべき乗項の和になるので，分母の$(z-1)$の項には手をつけない．もう一方の$(z+1)$の方を変形して「公比」を引き出そうと考える．その結果，下の式のような形にたどり着く．

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1+\dfrac{2}{z-1}}$$

よって最後の項に等比級数の式を適用すると

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}$$

(4)　べき級数　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}z^n$　の収束半径を求めよ．　(配点：10 点)

(解答例１)

ダランベールの評価式を用いると

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{n+2}\frac{n+1}{3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(3\frac{n+1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3\frac{1+1/n}{1+2/n}\right)=3$$

より，収束半径 R＝　<u>１／３</u>

(解答例２)

コーシーアダマールの評価式を用いると

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[n]{n+1}}=3 \qquad \therefore R=1/3$$

ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)^{1/n}=1$　を用いた．（有名な類似の公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x+1)^{1/x}=e$　と混同しないよう注意.）

問題 3.

(1) 積分路 C が，中心 z=1，半径 2 の円のとき，積分　$\displaystyle\int_C\frac{2z+1}{z^2+z-1}dz$　を計算せよ．

(配点：10 点)

(解答例)

被積分関数を部分分数分解すると　$\displaystyle\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$

<u>積分路 C の内側の特異点は z=1 のみ</u>である．

最右辺第２項に対してコーシーの積分公式 $\displaystyle f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$　で　$f(z)$=1　に相当するから $f(z_0)$=1 により，積分値は z_0 によらず <u>$2\pi i$</u> になる，と考えても良いし,一位の極の留数による求め方をしても $\displaystyle\mathrm{Res}(1)=\lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{2z-1}{(z+2)(z-1)}\right\}=\lim_{z\to 1}\frac{2z+1}{z+2}=1$　だから，

積分値＝$2\pi i$×留数＝<u>$2\pi i$</u>　としても同じ答えが得られる．

(2) 積分路 C が，中心 z=0，半径 3 の円のとき，積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z-2)^4}dz$ を計算せよ．

(配点：10 点)

(解答例１：留数を使う方法)

積分路 C 内の特異点は z=2 のみで，4 位の極であるから m=4 として留数を求める式を使うと，まず被積分関数に$(z-2)^4$ を乗じて 3 回微分すると e^z．$z\to 2$ として 3!で割り算すると

Res(2)=$e^2/6$　　よって積分の値は留数に 2πi を乗じて　$\underline{\pi e^2 i/3}$ (答)

(解答例２：グルサの公式を使う方法)　($n!$を忘れる答案が多いので注意)

グルサの公式　$\displaystyle f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$　で z_0=2, n=3, $f(z)=e^z$ とおくと，

$$f^{(3)}(z)=\frac{3!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-2)^4}dz \quad\Leftrightarrow\quad \int_C \frac{f(z)}{(z-2)^4}dz=\frac{2\pi i}{6}f^{(3)}(2)$$

$f(z)=e^z$ の 3 回微分は $f^{(3)}(z)=e^z$ だから，$f^{(3)}(2)=e^2$　　よって積分値は　$\underline{\dfrac{\pi e^2 i}{3}}$ (答)

(解答例 1)と(解答例 2)は限りなく同じことをやっていることがわかる．

(解答例３：級数展開によって極の位数を確認し，あわせて，直接留数を求める方法)

被積分関数をローラン展開する．そのためにまず e^z を z=2 を中心にテーラー展開する．

e^u のマクローリン展開は $\displaystyle e^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$　ここに u=z−2を代入すると　$\displaystyle e^{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{n!}$

(両辺に e^2 を乗じて)　⇔

$$e^z=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{n!}=e^2+e^2(z-2)+\frac{e^2(z-2)^2}{2!}+\frac{e^2(z-2)^3}{3!}+\frac{e^2(z-2)^4}{4!}+\ldots$$

よって，$\displaystyle \frac{e^z}{(z-2)^4}=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{n-4}}{n!}=\frac{e^2}{(z-2)^4}+\frac{e^2}{(z-2)^3}+\frac{e^2}{2!(z-2)^2}+\frac{e^2}{3!(z-2)}+\frac{e^2}{4!}+\ldots$

ここから，被積分関数が <u>4 位の極</u>であることが確認され，あわせて，$(z-2)^{-1}$ の係数である留数が $e^2/6$ であることがわかる．

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{2}{3-\cos\theta}d\theta$ を計算せよ． (配点：10 点)

(解答例)

積分路を複素平面上の単位円 C: $|z|=1$ にとり媒介変数表示すると $z=e^{i\theta}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

すると，$\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ と表されるので，これを与式に代入．さらに

$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta \Leftrightarrow d\theta=\dfrac{dz}{iz}$ を用いて積分変数を変換すると，求める積分＝

$$\int_C\frac{2}{3-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{1}{iz}dz=\int_C\frac{4z}{6z-z^2-1}\frac{1}{iz}dz=\int_C\frac{4i}{z^2-6z+1}dz$$

$$=\int_C\frac{4i}{(z-3-2\sqrt{2})(z-3+2\sqrt{2})}dz$$

最後の項は，(分母)＝0 を満たす z を，2 次方程式の解と係数の関係から $z=3\pm2\sqrt{2}$ と求めた．ここで，積分路 C(単位円)内の特異点は $z=3-2\sqrt{2}$ のみで 1 位の極．留数を求めると

$$\mathrm{Re}\,s(3-2\sqrt{2})=\frac{4i}{3-2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}}=-\frac{i}{\sqrt{2}}$$

よって積分値＝$2\pi i\left(-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\pi$ (答)

(コーシーの積分公式を使っても同じ結果を得る)

(4) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ を計算せよ． (配点：10 点)

(解答例 1)

被積分関数を $f(z)$ とおくと，$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}=\dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ すなわち，

複素平面の上半面にある特異点は $z=i$ のみであり，これは 2 位の極である．

留数を求めると，$f(z)$ に $(z-i)^2$ を乗じて $\dfrac{1}{(z+i)^2}$．これを 1 回微分して $\dfrac{-2}{(z+i)^3}$，

$z \to i$ とすると，$\dfrac{-2}{(2i)^3} = \dfrac{1}{4i}$ ．よって半円状の周回積分の値は $2\pi i \times \dfrac{1}{4i} = \dfrac{\pi}{2}$ …(☆)

一方，半径 R の半円状の円弧 S に沿った線積分の値を調べると，$z=Re^{i\theta}$ とおいて，また，

$dz=iRe^{i\theta}d\theta$ より，$\displaystyle\int_S f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{(R^2e^{i2\theta}+1)^2}d\theta$ となる．$\left|ie^{i\theta}\right| = \left|e^{i\theta}\right| = 1$ であり，分母の R の次数は分子の R の次数より 2 以上大きいので，$R \to \infty$ で被積分関数は 0 になり，その結果，(不定積分が定数になるので) 定積分の値→0 が保証される．この結果，求める実積分は先に留数から求めた通り(☆)となる．すなわち，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \underline{\frac{\pi}{2}}$ (答)

(解答例２)

本問の積分は複素関数を使わずとも，実関数のまま，$x=\tan\theta$ の変数変換で解くことができてしまうので，参考までに別解として示しておく．こちらの解き方でも正しく解けていれば正解とする．

式変形に使う三角関数の式を下記に挙げておく．(必要に応じて導出できるようにしておくこと．)

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$，$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$(\tan\theta)' = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

まず $x=\tan\theta$ と変数変換すると，$1+x^2 = 1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

より，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ を使って cos の次数を下げると

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2}\left[t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{\boxed{=0}}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(答)}$$