

# 15. 偏微分方程式

## 目標

- 偏微分方程式の意味が理解できる
- 楕円形、放物形、双曲形の2階偏微分方程式の違いが理解できる
- 変数分離法で解ける
- 行列を用いて解ける

# 15.0 偏微分方程式の定義

- 偏微分方程式
  - 2つ以上の変数の未知関数と、その偏導関数および変数の間の関係式
- 階数
  - 含まれる最高階の偏導関数の階数
- 解
  - 偏微分方程式を恒等的に満たす関数
- 一般解
  - 偏微分方程式の階数に等しい個数の任意関数を含む解

# 15.0 続き

- 線形偏微分方程式
  - 未知関数とその偏導関数に関して1次式となっている偏微分方程式
- 非線形
  - 線形でない偏微分方程式
- 準線形
  - 最高階の偏導関数について1次式となっている非線形偏微分方程式
- 斉次
  - 未知関数とその偏導関数を含む項のみからなる場合

# 15.0 線形方程式の 重ね合わせの原理

- 線形斉次偏微分方程式について、
  - 解の線形結合も、また、解となっている。
- 線形非斉次偏微分方程式の一般解
  - 線形斉次方程式の一般解に、
  - 非斉次方程式の解の一つを加えて得られる

## 例題 15.0.1

$\varphi$ と $\psi$ を任意関数として、

$u = \varphi(x + 2y) + \psi(3x - y)$ を一般解にもつ偏微分方程式を求めよ。

- 解 一般解が任意関数を2個含むことから、求めうる偏微分方程式が2階であることが解る。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x + 2y) + 3\psi'(3x - y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x + 2y) + 9\psi''(3x - y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\varphi''(x + 2y) - 3\psi''(3x - y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\varphi''(x + 2y) + \psi''(3x - y)$$

## 例題 15.0.1 続き

- $a, b, c$  を定数として  $a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  に代入する。
- $\varphi''(x + 2y)$  と  $\psi''(3x - y)$  の係数  $a + 2b + 4c, 9a - 3b + c$  を共にゼロとおく。すると

$$a = -\frac{2}{3}c, b = -\frac{5}{3}c$$

- であるから、求めうる微分方程式は

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$



# 15.1 偏微分方程式の分類

- 工学の諸問題で、よく登場するのは、2階の線形偏微分方程式である。

- その代表例

- 楕円形 ( $x^2 + y^2 = C$ )

- ラプラス方程式,  $C = 0$

- 放物形 ( $y - x^2 = C$ )

- 拡散方程式,  $C = 0$

- 双曲形 ( $y^2 - x^2 = C$ )

- 波動方程式,  $C = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- 形の名称は、導関数の階数に等しいべきの2次式が表す平面曲線に対応している。
- 2階偏微分斉次方程式は、以下で説明する変数分離法、または13.3節で説明した行列を用いて解くことができる。



# 参考までに...

- **Laplace**の方程式

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

- **Poisson**の方程式

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

- **Helmholtz**の方程式

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -k^2 u$$

全て楕円型である

## 15.1 続き

- これらの方程式を、与えられた境界条件、初期条件のもとで解くことが問題となる。
- 線形ならば重ね合わせの原理が成り立つ。
  - 従って、境界条件を満たす関数の組みを直交多項式として求め、これらの重ね合わせ(級数)で表現することで、一般解を得ることができる。
    - 2Qに、**フーリエ級数**や、(境界が $x = \pm\infty$ なら)**フーリエ変換・ラプラス変換**を学べば、上の説明の意味がわかってくるだろう。

## 15.2 変数分離法

- 双曲形を例として、位置 $x$ , 時刻 $t$ が満たす波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (15.1)$$

を変数分離法で解く。ただし、 $A$ は定数。

– 右辺の係数が $1/A^2$ としたのは、後の一般解を簡潔にするため。

- 2つの独立変数 $x, t$ の2階偏微分方程式の解 $u(x, t)$ を、 $x$ だけの関数 $f_x(x)$ と、 $t$ だけの関数 $f_t(t)$ の積と仮定し、 $u = f_x f_t$ とすると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_t \frac{d^2 f_x}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f_x \frac{d^2 f_t}{dt^2}$$

# 変数分離

- となる。それぞれの式において、左辺の偏微分が**右辺では常微分**になっていることに留意されたい。
- これらを式(15.1)へ代入すると、

$$f_t \frac{d^2 f_x}{dx^2} = \frac{1}{A^2} f_x \frac{d^2 f_t}{dt^2}$$

になる。さらに両辺を  $f_x f_t (= u)$  で割ると

$$\frac{1}{f_x} \frac{d^2 f_x}{dx^2} = \frac{1}{A^2} \frac{1}{f_t} \frac{d^2 f_t}{dt^2} = -B^2 \quad \text{となる。}$$

- $-B^2$ は**分離定数**と呼ばれる

# 分離定数

- 先の式で、**左辺は $x$ のみの関数、右辺は $t$ だけの関数**
- その式が任意の $x, t$ で成り立つためには、**その値が $x, t$ によらない定数(分離定数)**でなければならない。
  - 先の例では、一般解簡略化のため、分離定数 =  $-B^2$ とした。
  - この結果、次の**2つの常微分方程式**が得られた。

$$\frac{d^2 f_x}{dx^2} = -B^2 f_x, \quad \frac{d^2 f_t}{dt^2} = -(AB)^2 f_t$$

# 変数分離により常微分方程式に変形

- これらの常微分方程式の一般解は、それぞれ以下となる。

$$f_x = C_{x1} \cos Bx + C_{x2} \sin Bx \quad (15.2)$$

$$f_t = C_{t1} \cos ABx + C_{t2} \sin ABx \quad (15.3)$$

- 変形された常微分方程式がそれぞれ2階のため、一般解(15.2)-(15.3)はそれぞれ2つの任意定数を含む。
  - (15.2)の2つの任意定数 $C_{x1}$ ,  $C_{x2}$ は、 $x$ に関する2つの境界条件（あるいは初期条件）から定める。

- また、微分方程式(15.3)の2つの任意定数 $C_{t1}$  ,  $C_{t2}$  についても、 $t$ に関する2つの初期条件(あるいは境界条件)から決定する。
- さらに、分離定数 $B$ についても、境界条件・初期条件から決まるが、一般に1つとは限らない。
  - 定数 $B$ が離散的に $B_m$ のように決まる場合には、微分方程式(15.1)の一般解は

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m=1}^{\infty} f_{xm} f_{tm} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left( C_{x1m} \cos B_m x + C_{x2m} \sin B_m x \right) \left( C_{t1m} \cos AB_m t + C_{t2m} \sin AB_m t \right)
 \end{aligned}
 \tag{15.4}$$

– となる。

- また、定数 $B$ が離散的に定まらず、連続値 $b$ になる場合は、以下となる。

$$u = \int_0^{\infty} f_x f_t db$$

$$= \int_0^{\infty} \left\{ c_{x1}(b) \cos bx + c_{x2}(b) \sin bx \right\} \left\{ c_{t1}(b) \cos Abt + c_{t2}(b) \sin Abt \right\} db$$

– ここで、 $c_{x1}, c_{x2}, c_{t1}, c_{t2}$  はそれぞれ $b$ の関数となる。



**例題15.1** (1) 波動方程式の一般解(15.4)に、 $x = 0$  および  $x = L$  で  $u = 0$  となる境界条件を満たすように  $B_m$  を求めよ。

(2)  $t = 0$  で  $u = f(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$  となる初期条件を満たす解を求めよ。

(解) (1)  $x = 0$  で  $u = 0$  となる境界条件を満足するには、任意の時間  $t$  について、以下の式が成り立つ必要がある。

$$u(0, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{x1m} \left( C_{t1m} \cos AB_m t + C_{t2m} \sin AB_m t \right)$$

– よってすべての  $m$  について  $C_{x1m} = 0$

# 例題15.1 つづき

- 次に、 $x = L$  で  $u = 0$  となる境界条件を満足するには

$$u(L, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{x2m} \sin B_m L \left( C_{t1m} \cos AB_m t + C_{t2m} \sin AB_m t \right)$$

より、 $\sin B_m L = 0$  となる必要がある。すなわち、 $B_m L = m\pi$  より、

$$B_m = \frac{m\pi}{L} \quad \text{となる。}$$

(2) (1)の結果から

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{L} x \left( C_{t1m0} \cos A \frac{m\pi}{L} t + C_{t2m0} \sin A \frac{m\pi}{L} t \right)$$

となる。なお、 $C_{t1m0} = C_{x2m} C_{t1m}$ 、 $C_{t2m0} = C_{x2m} C_{t2m}$  とおいた。

# 例題15.1 さらにつづき

- $t = 0$  で  $u = f(x)$  を満足するには、

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{t1m0} \sin \frac{m\pi}{L} x$$

でなければならない。

- 展開係数  $C_{t1m0}$  を求めるために、**sin関数の直交性**を利用する。
- すなわち上記の両辺に  $\sin \frac{n\pi}{L} x$  をかけて  $0 \leq x \leq L$  で積分すると、 $m \neq n$  の項はすべてゼロ、 $m = n$  の項のみ残り、 $C_{t1n0} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$  となり、 $C_{t1n0}$  が定まった。

## 参考 sin関数同士の直交性

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \cos \left( \frac{m-n}{L} \pi x \right) - \cos \left( \frac{m+n}{L} \pi x \right) \right\} dx$$

i.  $m \neq n$  のとき、上記

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{L}{(m-n)\pi} \sin \left( \frac{m-n}{L} \pi x \right) - \frac{L}{(m+n)\pi} \sin \left( \frac{m+n}{L} \pi x \right) \right]_{x=0}^{x=L} = 0$$

i.  $m = n$  のとき、上記

$$= \frac{1}{2} \int_0^L dx - \frac{1}{2} \left[ \frac{L}{(m+n)\pi} \sin \left( \frac{m+n}{L} \pi x \right) \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{1}{2} L$$

# 例題15.1 さらにつづき

- また、 $u$ の時間微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A \frac{m\pi}{L} \sin \frac{m\pi}{L} x \left( -C_{t1m0} \sin A \frac{m\pi}{L} t + C_{t2m0} \cos A \frac{m\pi}{L} t \right)$$

– となっているので、 $t = 0$ で  $\frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$  のためには

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A \frac{m\pi}{L} C_{t2m0} \sin \frac{m\pi}{L} x$$

– でなければならない。

– 先と同様に上記の両辺に  $\sin \frac{n\pi}{L} x$  をかけて  $0 \leq x \leq L$  で積分すると、

$$C_{t2n0} = \frac{2}{Am\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \quad \text{となる。}$$

- よって、初期条件満足する解は

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{L} x$$

$$\left\{ \left( \int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi}{L} x \, dx \right) \cos A \frac{m\pi}{L} t + \frac{L}{Am\pi} \left( \int_0^L g(x) \sin \frac{m\pi}{L} x \, dx \right) \sin A \frac{m\pi}{L} t \right\}$$

- となる。



## 15.3 行列を用いて解く方法

- 微分方程式(15.1)を、13.3節で説明した行列を用いて解く。

- $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$  とおく。

– 微分方程式(15.1)は、これらを用いて  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{A^2} \frac{\partial u_t}{\partial t}$  と表される。また、これらは、

$$\frac{\partial u_t}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} \left( = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \text{ を満たす。}$$

- 2つの偏微分方程式は、以下のように行列を用いて

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} = A \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \quad (15.5)$$

• と表される。ここで、 $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_t \end{bmatrix}$ である。

式(15.5)を例題13.2と同様に変形する。

• 行列 $A$ の固有値は

$$B_1 = -1/A, B_2 = 1/A,$$

• それぞれに対応する固有ベクトルは

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -A \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ A \end{bmatrix} \quad \text{となる。}$$



- よって変形に必要な正則行列 $P$ は

$$P = [p_1, p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -A & A \end{bmatrix} \text{ となる。}$$

- ここで、

$$\boldsymbol{v} = P^{-1}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} A & -1 \\ A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_t \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} Au_x - u_t \\ Au_x + u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

- とおくと、

$$\frac{d}{dx} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \boldsymbol{v}$$

- となる。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial x}(Au_x - u_t) = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial t}(Au_x - u_t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Au_x + u_t) = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial t}(Au_x + u_t)$$

- と、独立した2つの1階偏微分方程式が得られる。
- これらの微分方程式を満たす関数は、それぞれ  $x - At$  を引数とする関数  $w_1$  と、 $x + At$  を引数とする関数  $w_2$  を用いて、

$$Au_x - u_t = w_1(x - At), \quad Au_x + u_t = w_2(x + At)$$

と表せる。これらを連立すると、

# ダランベールの解

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{A} w_1(x - At) + \frac{1}{A} w_2(x + At)$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = w_1(x - At) + w_2(x + At)$$

- が得られる。 $w_1, w_2$ の原始関数をそれぞれ $w_{p1}, w_{p2}$ とすると、

$$u = -\frac{1}{A} w_{p1}(x - At) + \frac{1}{A} w_{p2}(x + At)$$

- となり、引数を  $x - At$ と  $x + At$  にする2つの任意関数の和で表される。
- この解をダランベールの解という。

- 引数  $x - At$  を  $t$  で微分すると、 $\frac{dx}{dt} - A = 0$   
 から、 $\frac{dx}{dt} = A$ 
  - これより、関数  $w_{p1}$  は、速度  $A$  で移動していると解釈できる。
    - 速度  $A$  で、 $w_{p1}$  という任意の関数形が  $x$  軸上を動くような、波動伝搬を表していると解釈できる。
    - 同様に、引数  $x + At$  の関数  $w_{p2}$  は、速度  $-A$  で移動している、そのような波動伝搬を表していると解釈できる。
- 15.2節で変数分離法により求めた一般解 (15.4) も、三角関数の積和公式を用いると

$$\begin{aligned}
u = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x1m} C_{t1m} + C_{x2m} C_{t2m}}{2} \cos \left\{ B_m (x - At) \right\} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x1m} C_{t1m} - C_{x2m} C_{t2m}}{2} \cos \left\{ B_m (x + At) \right\} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x2m} C_{t1m} - C_{x1m} C_{t2m}}{2} \sin \left\{ B_m (x - At) \right\} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x2m} C_{t1m} + C_{x1m} C_{t2m}}{2} \sin \left\{ B_m (x + At) \right\}
\end{aligned}$$

- と、2つの引数  $x - At$  と、 $x + At$  に関する関数の和で表される。

# 補足～電磁波

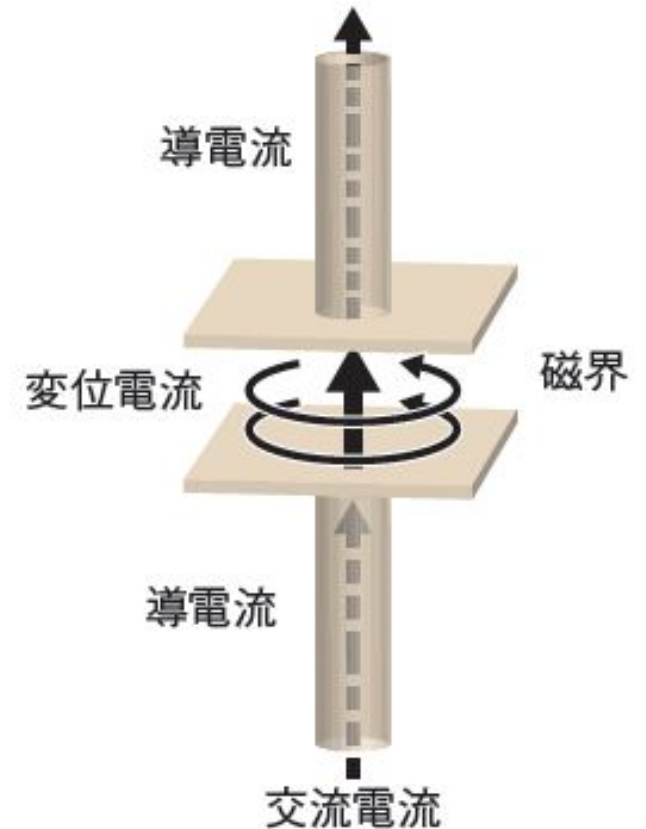
- 電磁波の伝搬は、波動方程式で表されることを示す。
- Ampèreの法則（のMaxwellによる拡張）

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$\mathbf{H}$  磁界、 $\mathbf{j}$  電流、 $\mathbf{D}$  電束密度、  
上の第2項は変位電流を表す

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$\varepsilon$  誘電率、 $\mathbf{E}$  電界

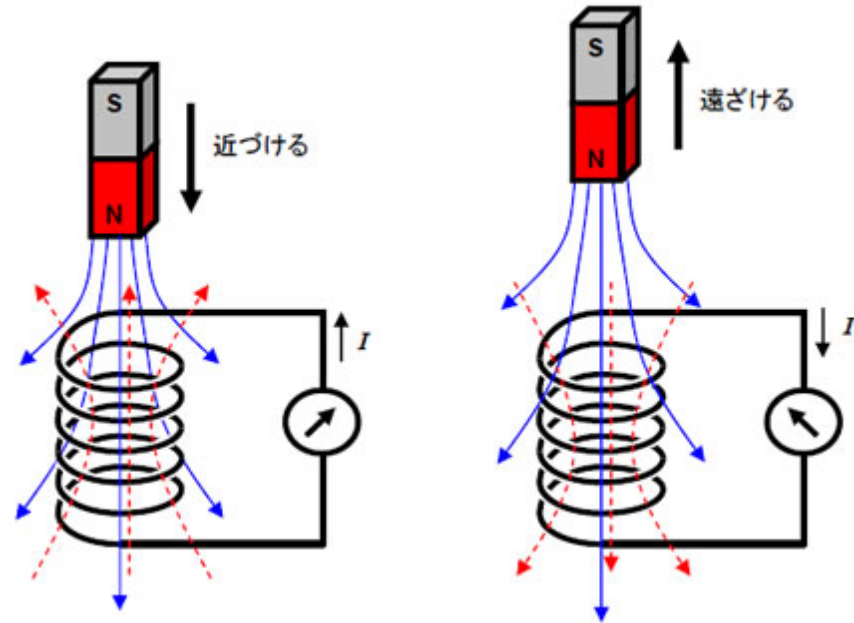


- Faradayの電磁誘導の法則

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

$\mathbf{B}$  磁束密度,  $\mu$  透磁率



以下、簡単化のため、 $\varepsilon$ と $\mu$ は定数とする

- すなわち  $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  (A)

- $\text{rot}\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  (F)

- (A)の時間微分をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (\text{A1})$$

- (F)のrotをとると

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}\mathbf{H}) \quad (\text{F1})$$



- (F1) に Gauss の法則  $\text{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho$  ( $\rho$  電荷密度) を適用して (A1) を (F1) に代入すると

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \rho - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- 媒質中に、電荷も電流もない場合 (例えば真空) を考えると、 $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ . 従って、

$$\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E}$$

と、電界ベクトルに関する波動方程式を得る。

- また、このことから、電磁波の伝搬速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

- で与えられる定数となることがわかる。
  - 光速度一定の原理; 座標によらない
  - **相対性理論**の基礎
- ここで電界ベクトルとして、以下のような時間に関して変数分離の解を仮定して代入してみる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0(x, y, z) \exp(-j\omega t)$$

- すると  $-\frac{\omega^2}{c^2} E_0(x, y, z) \exp(-j\omega t) = \exp(-j\omega t) \nabla^2 E_0(x, y, z)$
- すなわち  $\nabla^2 E_0 + k^2 E_0(x, y, z) = 0$   
( $k = \omega/c$ , 波数)
- と、電界ベクトルの空間依存部分は、楕円型のHelmholtz方程式を満たすことがわかる。

# まとめ：本日の確認事項

- 偏微分方程式の意味が理解できる
- 楕円形、放物形、双曲形の2階偏微分方程式の違いが理解できる
- 偏微分方程式を変数分離法で解ける
- 偏微分方程式を行列を用いて解ける