15. 偏微分方程式

目標

- 偏微分方程式の意味が理解できる
- 楕円形、放物形、双曲形の2階偏微分方程式の違いが理解できる
- 変数分離法で解ける
- 行列を用いて解ける

15.0 偏微分方程式の定義

- 偏微分方程式
  - 2つ以上の変数の未知関数と、その偏導関数および変数の間の関係式
- 階数
  - 含まれる最高階の偏導関数の階数
- 解
  - 偏微分方程式を恒等的に満たす関数
- 一般解
  - 偏微分方程式の階数に等しい個数の任意関数を含む解

15.0 続き

- 線形偏微分方程式
  - 未知関数とその偏導関数に関して1次式となっている偏微分方程式
- 非線形
  - 線形でない偏微分方程式
- 準線形
  - 最高階の偏導関数について1次式となっている非線形偏微分方程式
- 斉次
  - 未知関数とその偏導関数を含む項のみからなる場合

15.0 線形方程式の重ね合わせの原理

- 線形斉次偏微分方程式について、
  - 解の線形結合も、また、解となっている。

- 線形非斉次偏微分方程式の一般解
  - 線形斉次方程式の一般解に、
  - 非斉次方程式の解の一つを加えて得られる

例題 15.0.1

φとψを任意関数として、

$u = \varphi(x + 2y) + \psi(3x - y)$を一般解にもつ偏微分方程式を求めよ。

- 解　一般解が任意関数を2個含むことから、求めうる偏微分方程式が2階であることが解る。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'\left(x + 2y\right) + 3\psi'\left(3x - y\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''\left(x + 2y\right) + 9\psi''\left(3x - y\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\varphi''\left(x + 2y\right) - 3\psi''\left(3x - y\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\varphi''\left(x + 2y\right) + \psi''\left(3x - y\right)$$

例題 15.0.1 続き

- a, b, c を定数として $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ =0 に代入する。
- $\varphi''(x+2y)$と$\psi''(3x-y)$の係数$a+2b+4c$, $9a-3b+c$ を共にゼロとおく。すると

$$a=-\frac{2}{3}c,\ b=-\frac{5}{3}c$$

- であるから、求めうる微分方程式は

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

15.1 偏微分方程式の分類

- 工学の諸問題で、よく登場するのは、2階の線形偏微分方程式である。
- その代表例
  - 楕円形 $(x^2 + y^2 = C)$
    - ラプラス方程式, $C = 0$
  - 放物形 $(y - x^2 = C)$
    - 拡散方程式, $C = 0$
  - 双曲形 $(y^2 - x^2 = C)$
    - 波動方程式, $C = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- 形の名称は、導関数の階数に等しいべきの2次式が表す平面曲線に対応している。

- 2階偏微分斉次方程式は、以下で説明する変数分離法、または13.3節で説明した行列を用いて解くことができる。

参考までに…

- **Laplace**の方程式

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

- **Poisson**の方程式

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f\left(x, y, z\right)$$

- **Helmholtz**の方程式

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -k^2 u$$

全て楕円型である

15.1 続き

- これらの方程式を、与えられた境界条件、初期条件のもとで解くことが問題となる。

- 線形ならば重ね合わせの原理が成り立つ。
  - 従って、境界条件を満たす関数の組みを直交多項式として求め、これらの重ね合わせ(級数)で表現することで、一般解を得ることができる。
    - 2Qに、フーリエ級数や、(境界が$x = \pm\infty$なら)フーリエ変換・ラプラス変換を学べば、上の説明の意味がわかってくるだろう。

15.2 変数分離法

- 双曲形を例として、位置x, 時刻tが満たす波動方程式 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (15.1)$$
  を変数分離法で解く。ただし、Aは定数。
  - 右辺の係数が$1/A^2$としたのは、後の一般解を簡潔にするため。
- 2つの独立変数x, tの2階偏微分方程式の解$u(x, t)$を、xだけの関数$f_x(x)$と、tだけの関数$f_t(t)$の積と仮定し、$u = f_x f_t$とすると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_t \frac{\mathrm{d}^2 f_x}{\mathrm{d}x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f_x \frac{\mathrm{d}^2 f_t}{\mathrm{d}t^2}$$

変数分離

- となる。それぞれの式において、左辺の偏微分が右辺では常微分になっていることに留意されたい。
- これらを式(15.1)へ代入すると、

$$f_t \frac{\mathrm{d}^2 f_x}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{A^2} f_x \frac{\mathrm{d}^2 f_t}{\mathrm{d}t^2}$$

になる。さらに両辺を $f_x f_t\ (= u)$ で割ると

$$\frac{1}{f_x}\frac{\mathrm{d}^2 f_x}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{A^2}\frac{1}{f_t}\frac{\mathrm{d}^2 f_t}{\mathrm{d}t^2} = -B^2$$ となる。

- $-B^2$は分離定数と呼ばれる

分離定数

- 先の式で、左辺はxのみの関数、右辺はtだけの関数
- その式が任意のx, tで成り立つためには、その値がx, tによらない定数(分離定数)でなければならない。
  - 先の例では、一般解簡略化のため、分離定数 = $-B^2$とした。
  - この結果、次の2つの常微分方程式が得られた。

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_x}{\mathrm{d}x^2} = -B^2 f_x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f_t}{\mathrm{d}t^2} = -\left(AB\right)^2 f_t$$

変数分離により常微分方程式に変形

- これらの常微分方程式の一般解は、それぞれ以下となる。

$$f_x = C_{x1} \cos Bx + C_{x2} \sin Bx \qquad (15.2)$$

$$f_t = C_{t1} \cos ABx + C_{t2} \sin ABx \qquad (15.3)$$

- 変形された常微分方程式がそれぞれ2階のため、一般解(15.2)-(15.3)はそれぞれ2つの任意定数を含む。
  - (15.2)の2つの任意定数C_{x1}, C_{x2}は、xに関する2つの境界条件（あるいは初期条件）から定める。

- また、微分方程式(15.3)の2つの任意定数C_{t1}，C_{t2}についても、tに関する2つの初期条件(あるいは境界条件)から決定する。
- さらに、分離定数Bについても、境界条件・初期条件から決まるが、一般に1つとは限らない。
  - 定数Bが離散的にB_mのように決まる場合には、微分方程式(15.1)の一般解は

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} f_{xm} f_{tm}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{x1m} \cos B_m x + C_{x2m} \sin B_m x \right) \left(C_{t1m} \cos AB_m t + C_{t2m} \sin AB_m t \right) \tag{15.4}$$

  - となる。

- また、定数Bが離散的に定まらず、連続値bになる場合は、以下となる。

$$u = \int_0^\infty f_x f_t \, \mathrm{d}b$$

$$= \int_0^\infty \left\{ c_{x1}(b) \cos bx + c_{x2}(b) \sin bx \right\} \left\{ c_{t1}(b) \cos Abt + C_{t2}(b) \sin Abt \right\} \mathrm{d}b$$

  - ここで、c_{x1}, c_{x2}, c_{t1}, c_{t2} はそれぞれbの関数となる。

例題15.1

(1) 波動方程式の一般解(15.4)に、$x = 0$ および$x = L$で $u = 0$となる境界条件を満たすようにB_mを求めよ。

(2) $t = 0$で $u = f(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(x\right)$ となる初期条件を満たす解を求めよ。

(解) (1) $x = 0$で $u = 0$となる境界条件を満足するには、任意の時間 t について、以下の式が成り立つ必要がある。

$$u\left(0,t\right) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{x1m}\left(C_{t1m}\cos AB_m t + C_{t2m}\sin AB_m t\right)$$

– よってすべてのmについて $C_{x1m} = 0$

例題15.1 つづき

- 次に、$x = L$ で $u = 0$となる境界条件を満足するには

$$u\left(L,t\right) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{x2m} \sin B_m L \left(C_{t1m} \cos AB_m t + C_{t2m} \sin AB_m t \right)$$

より、$\sin B_m L = 0$となる必要がある。すなわち、$B_m L = m\pi$より、

$$B_m = \frac{m\pi}{L}$$

となる。

(2) (1)の結果から

$$u\left(x,t\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{L} x \left(C_{t1m0} \cos A \frac{m\pi}{L} t + C_{t2m0} \sin A \frac{m\pi}{L} t \right)$$

– となる。なお、$C_{t1m0} = C_{x2m} C_{t1m}$, $C_{t2m0} = C_{x2m} C_{t2m}$とおいた。

例題15.1 さらにつづき

- $t=0$ で $u=f(x)$を満足するには、

$$f\left(x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}C_{t1m0}\sin\frac{m\pi}{L}x$$

でなければならない。

- 展開係数C_{t1m0}を求めるために、sin関数の直交性を利用する。
- すなわち上記の両辺に $\sin\frac{n\pi}{L}x$ をかけて $0\le x\le L$ で積分すると、$m\neq n$の項はすべてゼロ、$m=n$の項のみ残り、$C_{t1n0}=\frac{2}{L}\int_0^L f\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$ となり、C_{t1n0}が定まった。

参考　sin関数同士の直交性

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{\cos\left(\frac{m-n}{L}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{L}\pi x\right)\right\}\mathrm{d}x$$

$i.$　$m \neq n$のとき、上記

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{m-n}{L}\pi x\right) - \frac{L}{(m+n)\pi}\sin\left(\frac{m+n}{L}\pi x\right)\right]_{x=0}^{x=L} = 0$$

$i.$　$m = n$のとき、上記

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi}\sin\left(\frac{m+n}{L}\pi x\right)\right]_{x=0}^{x=L} = \frac{1}{2}L$$

例題15.1 さらにつづき

- また、uの時間微分は

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(x,t\right)=\sum_{m=1}^{\infty}A\frac{m\pi}{L}\sin\frac{m\pi}{L}x\left(-C_{t1m0}\sin A\frac{m\pi}{L}t+C_{t2m0}\cos A\frac{m\pi}{L}t\right)$$

  - となっているので、$t=0$で $\frac{\partial u}{\partial t}=g\left(x\right)$ のためには

$$g\left(x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}A\frac{m\pi}{L}C_{t2m0}\sin\frac{m\pi}{L}x$$

  - でなければならない。
  - 先と同様に上記の両辺に $\sin\frac{n\pi}{L}x$ をかけて $0\le x\le L$で積分すると、

$$C_{t2n0}=\frac{2}{Am\pi}\int_0^L g\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$$ となる。

- よって、初期条件満足する解は

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi}{L}x$$

$$\left\{\left(\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x\,\mathrm{d}x\right)\cos A\frac{m\pi}{L}t+\frac{L}{Am\pi}\left(\int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi}{L}x\,\mathrm{d}x\right)\sin A\frac{m\pi}{L}t\right\}$$

- となる。

15.3 行列を用いて解く方法

- 微分方程式(15.1)を、13.3節で説明した行列を用いて解く。
- $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x},\ u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ とおく。
  - 微分方程式(15.1)は、これらを用いて $\dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \dfrac{1}{A^2}\dfrac{\partial u_t}{\partial t}$ と表される。また、これらは、
    $\dfrac{\partial u_t}{\partial x} = \dfrac{\partial u_x}{\partial t}\left(= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)$ を満たす。
  - 2つの偏微分方程式は、以下のように行列を用いて

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u} \qquad (15.5)$$

- と表される。ここで、$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{A^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_t \end{bmatrix}$

である。

式(15.5)を例題13.2と同様に変形する。

- 行列$\boldsymbol{A}$の固有値は

$$B_1 = -1/A,\ B_2 = 1/A,$$

- それぞれに対応する固有ベクトルは

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -A \end{bmatrix},\ p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ A \end{bmatrix}$$ となる。

- よって変形に必要な正則行列$\boldsymbol{P}$は

$$\boldsymbol{P}=\left[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\right]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -A & A\end{bmatrix}$$ となる。

- ここで、

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{u}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}A & -1\\ A & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_t\end{bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}Au_x-u_t\\ Au_x+u_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

- とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{A} & 0\\ 0 & \frac{1}{A}\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}$$

- となる。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Au_x - u_t\right) = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\left(Au_x - u_t\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Au_x + u_t\right) = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\left(Au_x + u_t\right)$$

- と、独立した2つの1階偏微分方程式が得られる。
- これらの微分方程式を満たす関数は、それぞれ $x - At$ を引数とする関数w_1と、$x + At$ を引数とする関数w_2を用いて,

$$Au_x - u_t = w_1(x - At),\ \ Au_x + u_t = w_2(x + At)$$

と表せる。これらを連立すると、

ダランベールの解

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{A} w_1\left(x - At\right) + \frac{1}{A} w_2\left(x + At\right)$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = w_1\left(x - At\right) + w_2\left(x + At\right)$$

- が得られる。w_1, w_2の原始関数をそれぞれw_{p1}, w_{p2}とすると、

$$u = -\frac{1}{A} w_{p1}\left(x - At\right) + \frac{1}{A} w_{p2}\left(x + At\right)$$

- となり、引数を $x - At$と $x + At$ にする2つの任意関数の和で表される。
- この解を**ダランベールの解**という。

- 引数 $x - At$ を t で微分すると、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - A = 0$ から、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A$
  - これより、関数w_{p1}は、速度Aで移動していると解釈できる。
    - 速度Aで、w_{p1}という任意の関数形が x 軸上を動くような、波動伝搬を表していると解釈できる。
    - 同様に、引数 $x + At$ の関数w_{p2}は、速度 $-A$で移動している、そのような波動伝搬を表していると解釈できる。
- 15.2節で変数分離法により求めた一般解(15.4)も、三角関数の積和公式を用いると

$$
\begin{aligned}
u = &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x1m}C_{t1m} + C_{x2m}C_{t2m}}{2} \cos\left\{B_m\left(x - At\right)\right\} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x1m}C_{t1m} - C_{x2m}C_{t2m}}{2} \cos\left\{B_m\left(x + At\right)\right\} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x2m}C_{t1m} - C_{x1m}C_{t2m}}{2} \sin\left\{B_m\left(x - At\right)\right\} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x2m}C_{t1m} + C_{x1m}C_{t2m}}{2} \sin\left\{B_m\left(x + At\right)\right\}
\end{aligned}
$$

- と、2つの引数 $x - At$ と、$x + At$ に関する関数の和で表される。

15章の補足：一般の2階線形偏微分方程式

- 一般に、2つの独立変数x, yに依存する関数$u = u(x, y)$ に対する2階の偏微分方程式は、

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

と書かれる。(ただし、$|A|+|B|+|C| \neq 0$)

  - $A, B, \ldots, G$ はxとyには依存し得るが、uには依存しない。

- **$B^2 - 4AC > 0$ — 双曲型**
- **$B^2 - 4AC = 0$ — 放物型**
- **$B^2 - 4AC < 0$ — 楕円型**

補足: 定数係数2階線形偏微分方程式の解法

- 例題　次の偏微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- 解

  $u = \exp(Ax + By)$とおいて、与えられた方程式に代入すると

  $(A^2 + 3AB - 10B^2)\exp(Ax + By) = 0,$

  – 即ち、$(A - 2B)(A + 5B) = 0$から, $A = 2B$ または$A = -5B$が解を与える条件と考えられる。

  – $A = 2B$の時には $\exp[B(y + 2x)]$　が解

  – $A = -5B$の時には $\exp[B(y - 5x)]$　が解

つづき

- 従って、Bを任意定数として$\exp[B(y + 2x)]$と$\exp[B(y - 5x)]$は解
  - さらにそれらの線型結合も解
    - Bに様々な値を与えての線型結合も解
  - これらの多様性から、φとψを任意関数として、結局は

$$u = \varphi(y + 2x) + \psi(y - 5x)$$

  - が一般解と予想される。
- 以下、この予想が正しいことを示す。

つづき

- $\xi = y + 2x$, $\eta = y - 5x$とおき、変数変換すべく偏微分係数を計算する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial \xi} - 5\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 20\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 25\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

となるので、これらを与えられた方程式に代入する。

つづき

- この結果、次式が得られる。 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$
- これをξで積分すると $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \Psi(\eta)$
  - ただしψは任意関数。さらにηで積分すると

$$u = \int \Psi(\eta)\, d\eta + \varphi(\xi) = \psi(\eta) + \varphi(\xi)$$

  - となる。
  - ここに、$\int \Psi(\eta)\, d\eta = \psi(\eta)$ と取り直した。
- $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(y + 2x) + \psi(y - 5x)$ と定義を代入すれば、予想が正しいことは明らか。

考察

- ちなみに、この偏微分方程式は、双曲型である。
- 従って、波動解が得られることは物理的にも妥当。

定数係数2階線形偏微分方程式のまとめ

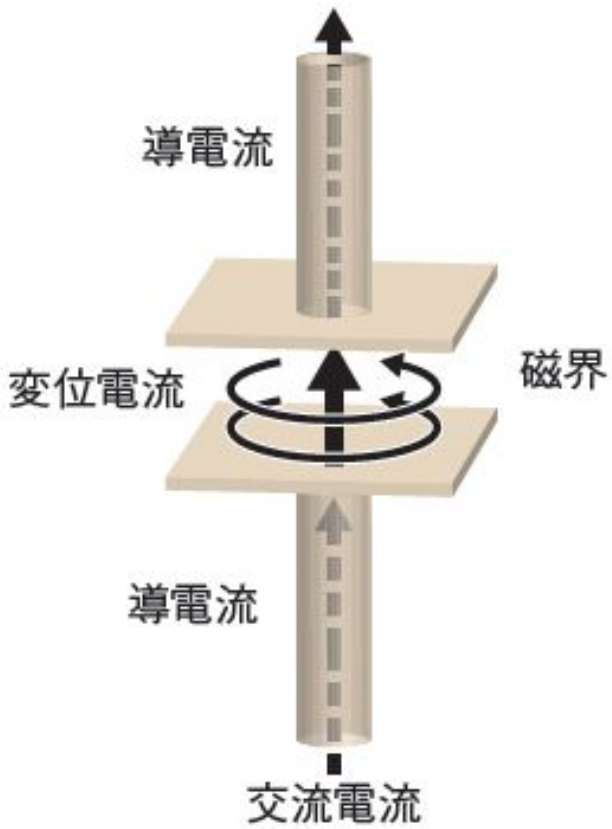
- 定数係数の場合には、$u = \exp(Ax + By)$を代入し、定数AとBを決めて一般解を推察する。
  - 一般解であることの証明は、この方法を「公式」と考えることで、省略して良い。

- なお、x, yの線型結合について$(Ax + By)$が重解となるときは、一般解は$u = \varphi(Ax + By) + x \bullet \varphi(Ax + By)$ となる。(積分により証明可能)

補足その2～電磁波

- 電磁波の伝搬は、波動方程式で表されることを示す。
- Ampèreの法則（のMaxwellによる拡張）

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$



H 磁界、***j*** 電流、***D*** 電束密度,
上の第2項は変位電流を表す

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

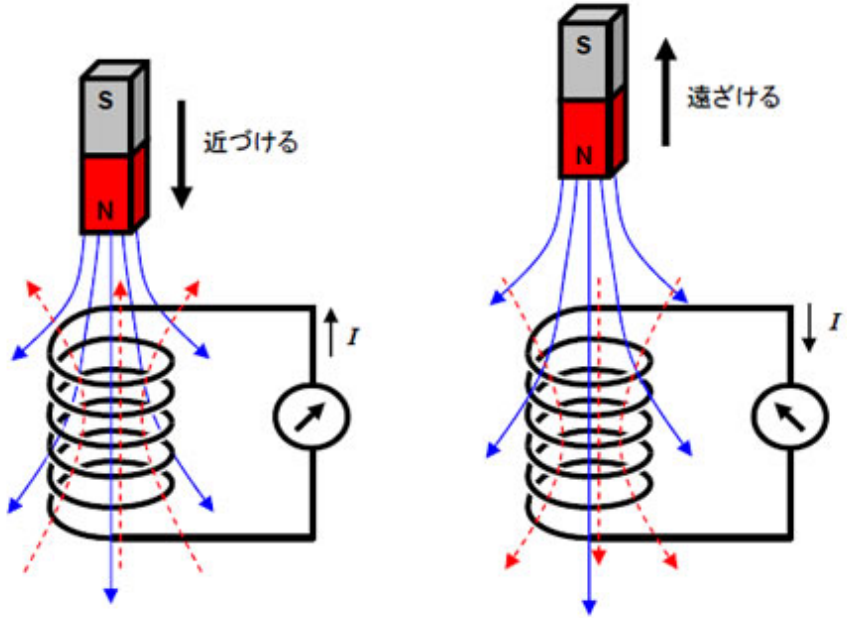
ε 誘電率, ***E*** 電界

- Faradayの電磁誘導の法則

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

B 磁束密度，μ 透磁率



以下、簡単化のため、εとμは定数とする

- すなわち $\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ (A)
- $\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$ (F)
- (A)の時間微分をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \quad \text{(A1)}$$

- (F)のrotをとると

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}\right) = \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\boldsymbol{E}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\boldsymbol{H}\right)$$

(F1)

- (F1) にGaussの法則 $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho$ (ρ 電荷密度) を適用して(A1)を(F1)に代入すると

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\rho - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

- 媒質中に、電荷も電流もない場合（例えば真空）を考えると、$\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$. 従って、

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

と、電界ベクトルに関する波動方程式を得る。

- また、このことから、電磁波の伝搬速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

- で与えられる定数となることがわかる。
  - 光速度一定の原理;座標によらない
  - **相対性理論**の基礎

- ここで電界ベクトルとして、以下のような時間に関して変数分離の解を仮定して代入してみる。

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\left(x, y, z, t\right) = \boldsymbol{E}_0\left(x, y, z\right)\exp\left(-j\omega t\right)$$

- すると $$-\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E}_0\left(x,y,z\right)\exp\left(-j\omega t\right)=\exp\left(-j\omega t\right)\nabla^2\boldsymbol{E}_0\left(x,y,z\right)$$
- すなわち $$\nabla^2\boldsymbol{E}_0+k^2\boldsymbol{E}_0\left(x,y,z\right)=0$$

  ($k = \omega/c$, 波数)
- と、電界ベクトルの空間依存部分は、楕円型のHelmholtz方程式を満たすことがわかる。

まとめ:本日の確認事項

- 偏微分方程式の意味が理解できる
- 楕円形、放物形、双曲形の2階偏微分方程式の違いが理解できる
- 偏微分方程式を変数分離法で解ける
- 偏微分方程式を行列を用いて解ける