解析学演習　微分方程式(第 9 回)　解答例

2018/5/21

1.

(1)[1 点]　一般解とされる $y=\frac{1}{2}Cx-\frac{1}{4}C^2$ より、 $y'=\frac{1}{2}C$ となる。これを元の式に代入すると確認できる。

左辺＝ $y=\frac{1}{2}Cx-\frac{1}{4}C^2$, 右辺＝ $xy'-y'^2=x\cdot\frac{1}{2}C-\left(\frac{1}{2}C\right)^2=\frac{1}{2}Cx-\frac{1}{4}C^2$ より、左辺＝右辺が成立している。かつ、一階の常微分方程式に対して、 $y=\frac{1}{2}Cx-\frac{1}{4}C^2$ は任意定数を 1 つ含んでいる。したがって明らかに $y=\frac{1}{2}Cx-\frac{1}{4}C^2$ は、常微分方程式 $y=xy'-y'^2$ の一般解である。

(2) [1 点]　 $y=\frac{1}{4}x^2$ より、 $y'=\frac{1}{2}x$。これを元の式に代入すると確認できる。

左辺＝ $y=\frac{1}{4}x^2$, 右辺 ＝ $xy'-y'^2=x\cdot\frac{1}{2}x-\left(\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{1}{4}x^2$ より、左辺＝右辺が成立している。かつ、 $y=\frac{1}{4}x^2$ は、一般解 $y=\frac{1}{2}Cx-\frac{1}{4}C^2$ の任意定数を変化させても決して得ることはできない。したがって明らかに $y=\frac{1}{4}x^2$ $y=\frac{1}{2}Cx-\frac{1}{4}C^2$ は、常微分方程式 $y=xy'-y'^2$ の特異解である。

2. (1) [1 点] 両辺を(y^2+1)で割ると, $\frac{2y}{y^2+1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$となる。この両辺を x で積分すると,

$$\int\frac{2y}{y^2+1}\mathrm{d}y=\int\mathrm{d}x=x+C$$

すなわち　　$\log|y^2+1|=x+C$

すなわち　　$y^2+1=\exp C\cdot\exp x=C_0\exp x$

となる。ここで, C_0 は任意定数である。

(2) [1 点]両辺を(y^2+1)で割ると、$\frac{1}{y^2+1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2+1}$となる。この両辺を x で積分すると,

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

すなわち

$$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$$

この両辺の正接をとる。$\tan C = C_0$ とおくと

$$y = \frac{x + C_0}{1 - C_0 x}$$

となる。

3. (1) [1 点]　$y = xu$ とおき、両辺を x で微分すれば、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$である。

そこで、これらを与式に代入すると

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u + \tan u$$

ここで $\tan u \neq 0$ の時は

$$\frac{1}{\tan u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$

この両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{\tan u}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log|x| + C$$

すなわち

$$\log|\sin u| = \log|x| + C$$

すなわち

$$\sin u = C_0 x$$

従って

$$u = \sin^{-1}(C_0 x)$$

ここで u を元に戻して

$$y = x\sin^{-1}(C_0 x)$$

を一般解として得る。
なお、$\tan u = 0$ の時は、上で $C_0 = 0$ の場合に対応しており、上の一般解に含まれている。

(2) [1 点]　両辺を x で割ると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

となる。ここで $y = xu$ とおき、両辺を x で微分すれば、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$であるから、与式に代入すると

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u - \sqrt{1 + u^2}$$

すなわち

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{1+u^2}$$

これは変数分離形である。両辺を$x\sqrt{1+u^2}$で割ると

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\log|x| + C$$

すなわち

$$\log\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\log|x| + C$$

すなわち

$$u+\sqrt{1+u^2} = \frac{C_0}{x}$$

ここで両辺を x 倍すると

$$y+\sqrt{x^2+y^2} = C_0$$

となる。ここでこの式を

$$\sqrt{x^2+y^2} = C_0 - y$$

と変形して両辺を平方し整理すると

$$x^2+y^2 = C_0^2 - 2C_0 y + y^2$$

となるので、一般解を

$$y = \frac{1}{2C_0}(C_0^2 - x^2)$$

と得ることができる。

4. (1) [2 点]　$y^2 = 4Cx$

両辺を x で微分すると

$$2yy' = 4C$$

となる。この式と元の式から C を消去すると

$$y^2 = 2yy'x$$

となる。なお、$y \neq 0$ として

$$y = 2y'x$$

と変形しても、変形後の微分方程式においても $y = 0$ が解として含まれていることから、$y^2 = 2yy'x$ を変形し

$$y = 2y'x$$

とした式を求め得る微分方程式とすることができる。あるいは整理して

$$2xy' - y = 0$$

4. (2) [2 点]　$y = C_1 x + C_2 \exp(x)$

両辺を x で 1 階、2 階と微分すると、それぞれ

$$y' = C_1 + C_2 \exp x$$

$$y'' = C_2 \exp x$$

を得る。これより、

$$C_1 = y' - y'',$$

$$C_2 = y'' \exp(-x)$$

をうるので、元の微分方程式に代入して C_1 , C_2 を消去すると

$$y = (y' - y'')\, x + y''$$

あるいは整理して

$$(x - 1)\, y'' - xy' + y = 0$$