

電磁気学基礎 I-e(上妻)No.2



2018.10.22

【1】《テイラー展開》

- (i) $f(x) = 1/(1-x)$ を $x=0$ の周りでテイラー展開せよ。
(ii) (i) の結果はよく知っているはずの式である。このテイラー展開はどのような範囲の x に対して収束すると考えられるか。
(iii) $f(x) = \exp(x+2x^2)$ で、 x が十分ゼロに近いときに x^2 まで知る必要が生じた。A 君は次のように考えた。
 $y = x+2x^2$ とおく。 x が十分ゼロに近いのだから、当然 y も十分ゼロに近い。したがって e^y を問題にすればよく、 y が十分ゼロに近いので

$$e^y \simeq 1+y \quad (1)$$

としてよい。 y を x での表現に戻して

$$\exp(x+2x^2) \simeq 1+x+2x^2 \quad (2)$$

一方、B 君は次のように考えた。 $y = x+2x^2$ とおく。 x が十分ゼロに近いのだから $2x^2$ は x に比べて無視できるので、 $y = x$ と思ってよい。したがって

$$\exp(x+2x^2) \simeq e^x \simeq 1+x+\frac{1}{2}x^2 \quad (3)$$

二人の答を比べてみると、 x^2 の項の係数が違うのだが、あなたの意見は？

- (iv) e^x と $\sin x$ のテイラー展開を利用して、 $g(x) = \exp(x^2) \sin(x-2x^2)$ を $x=0$ 近傍で x^3 の次数まで展開せよ。

【2】《線積分》

- (i) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x, 0)$ であるとき、3つの経路 C_1, C_2, C_3 に沿った線積分

$$W_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad W_2 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad W_3 = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad W_4 = \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

を計算せよ。ただし

$C_1 : (0, 0) \Rightarrow (1, 1)$ の直線。

$C_2 : (0, 0) \Rightarrow (1, 0) \Rightarrow (1, 1)$ の折れ線。

$C_3 : (0, 0) \Rightarrow (0, 1) \Rightarrow (1, 1)$ の折れ線。

$C_4 : y = x^2$ に沿って $(0, 0) \Rightarrow (1, 1)$ 。

- (ii) (i) の $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の代わりに $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = (y, 0)$ として、4つの経路 C_1, C_2, C_3 に沿った線積分

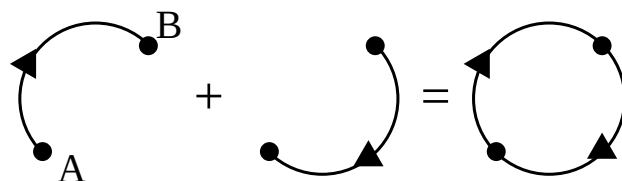
$$W'_1 = \int_{C_1} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}, \quad W'_2 = \int_{C_2} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}, \quad W'_3 = \int_{C_3} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}, \quad W'_4 = \int_{C_4} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

を計算せよ。経路の $C_1 \sim C_4$ は (i) と同じものである。

(※) $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = (0, y)$ の間違いではない、念のため。

- (iii) (i)(ii) の結果を見て当然気づくべき重要なことは何か。

【3】《線積分 2》



保存力場では力の線積分

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

が経路 C の詳細によらずにその端点だけで決まる。

上図を参考にして，閉曲線 C_0 に関する線積分が常に

$$\oint_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2)$$

であれば上のことが成り立つことを説明せよ。

(※) 閉曲線についての線積分にはしばしば $\oint$ の記号を用いてそのことを明示するが， $\oint$ はつけなくても間違いではない。経路の情報は閉曲線かどうかも含めて C などで指定されているからである。なお，閉曲線についてではない線積分を $\oint$ で書けば，それは間違いである。