2018 年 5 月 18 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 10

お知らせ

- 提出物にキーワードがないもの，誤ったキーワードのものがありました．得点は 0 とします．

前回までの訂正

- 講義ノート，問題 2-9 の解答：$f_{xx} = -4xy^3(x^2-3y^2)/(x^2+y^2)^3 \ ((x,y)\neq(0,0))$ （全体にマイナス）．

授業に関する御意見

- OCW-i の微分積分学第 1 の講義資料のページに行けないです（リンクが黒になっている）．
  山田のコメント： いつのまにか非公開になっていました．申し訳ありません．対応しましたので，現在は閲覧可能のはず．なぜ勝手に非公開になるか OCW サポートに問い合わせ中．不具合の場合は OCW，講義 web ページをご参照ください．
- 4 月 14 日から悩んだ置換積分の問題ですが，今日先生に質問したことで漸く解くことが出来ました．数学は時間をかけるべきだと実感しました．本当に感謝申し上げます．これからも宜しくお願い致します． **山田のコメント：** こちらこそ．
- 「授業中にクソという言葉を使わないでください」と前に意見欄に書いた者ですが，山田先生がそれをちゃんと覚えていてくださってうれしかったです．この講義中は「クソ」という言葉を一回も使わないでもらえると嬉しいです．
  山田のコメント： 覚えているのはたまたまでしょうね．なるべく記憶に入れておくようにはしていますが．
- 冷房苦手ですぐにお腹を壊してしまうので，できるだけ換気でお願いします． **山田のコメント：** 他の方の意向もありますので，お約束できません．エアコンを入れた場合，温度ムラがかなりあるので，適切に移動してくれるとありがたいです．
- 印刷にゆがみがありました． **山田のコメント：** Sorry.
- 提出用紙で先生のコメントや解説はときどき読めないので，字をちょっときれいに書けばありがたいです．
  山田のコメント： 講義資料 2, お知らせの最初の項目参照．
- 同じ内容のメールが 2 件来ることがあるので確認お願いします． **山田のコメント：** どのメイルが 2 通来ましたか?
- のろしの漢字初めてしりました．ありがとうございます． **山田のコメント：** どういたしまして．
- あの教室からのろしは見えないのでは? **山田のコメント：** たしかに地下ですね．
- 面白かったです．中間テストにトランシーバーの持ち込みは許可されますか． **山田のコメント：** 外部と通信する機器では？
- 中間試験予告のプリントにおいて，糸電話，公衆電話，数学の得意な友人などの生き物と書かれてあり，非常におもしろかったです． **山田のコメント：** どうも．
- 独り言もマイクを使って話すのが面白いです． **山田のコメント：** ピンマイクをつけたままトイレに入ったことも...
- ネクタイ止めはクリップだったのが良かったです（5/11 のとき） **山田のコメント：** だいたいいつもそうです
- 講義中の板書にあった「不」の漢字が（右が破っている）となっていて気持ち悪かったです． **山田のコメント：** そうなのか．
- 身長は何キロメートルですか? **山田のコメント：** 山田のですか? 1.7×10^{-3}Km.
- 視力がいくつかどうしても気になります． **山田のコメント：** だれの?
- $\xi\xi\xi\xi\xi\xi$ $\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon$ **山田のコメント：** ですね．
- 質点と得点をかけてユークリッドを出してきたとこが笑えました． **山田のコメント：** Euclid は質点を扱っていない．「点」．
- 中間は主に微積の演習のプリントをやっておけば対応できますか．講義中に例題をやって下さって嬉しいです．もっとやっていただきたいです． **山田のコメント：** 「やっておけば」の程度か分からないので解答不能．後半，例題だけでは講師が飽きる．
- 重積分の例題があって分かりやすいです． **山田のコメント：** でしょ．
- 重積分の解き方を見につけたいです．（原文ママ） **山田のコメント：** 見につけなくてよいので，身につけてください．
- 今回の授業は理解しやすい． **山田のコメント：** そうですか?
- 授業がいつものように続いているから新しい意見はあまりないです． **山田のコメント：** 了解．
- いつも楽しい授業ありがとうございます． **山田のコメント：** どういたしまして．
- 良かったです． **山田のコメント：** 何がどう？
- 初回に成績はすべてテストで決めると言っていたのを聞いて，これまでこの紙をだしていませんでした．ごめんなさい．これからまじめに出します． **山田のコメント：** 「原則として定期試験の成績」とは申し上げましたが，それは「すべてテスト」と同じことなのでしょうか．情報の取り入れ方を考えなおした方がよいと思います．
- 特にないです．/なし． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： 分割 Δ の幅 $|\Delta|$ が単に分割の間隔の絶対値 $|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \ldots, |x_N - x_{N-1}|$ それぞれを指すのではなく，そのうちの最大値と定められているのはなぜなのですか?

お答え： $|\Delta| \to 0$ という極限を考えたいので，$|\Delta|$ は一つの数にしたい．

質問 2： 分割の幅 $x_1 - x_0$，$x_2 - x_1$，$x_3 - x_2, \ldots$ はなぜ同じ長さにならないように $x_0, x_1, \ldots$ をとってもいいのですか? **お答え：**「とってもいい」のではなく「どんな分割に対しても...」を積分可能性の定義にしている．

質問 3： 例 5.3 がよくわかりません． なぜ $\overline{S}_\Delta(f) \leqq |\Delta|$ となるのでしょうか?

お答え： 各番号 k に対して $x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta|$ だから．

質問 4： 授業の序盤に積分を説明する際におっしゃっていた“循環論法になっている”の部分の理解が追いつかなかったので，今一度文字に起こして欲しいです．

お答え： 高等学校的な定義：(1) $F'(x) = f(x)$ となる関数 F を f の原始関数とよぶ．(2) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ と定義する．ただし F は f の原始関数．【問】与えられた関数の原始関数はいつでも存在するか? 【答】連続関数の原始関数は存在する．【問題点】連続関数 f の原始関数の存在は $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおけばこれが原始関数となることからわかる．ところが，高等学校的な定義では，右辺は原始関数が存在しないと意味を持たないので，これでは循環論法．すなわち，論理的には，原始関数と無関係に定積分が定義できないと困る．

質問 5： $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ と定義すると循環論法になり，$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \to F''(x) = f(x)$ とすると循環論法にならないということがよく分かりませんでした．

お答え： 定積分の定義をどうするか，ということ．定積分の定義を「原始関数を用いないもの」にすればよい．

質問 6： 高等学校の積分の定義がヤバイということをおっしゃっていましたが，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を考えなければいいのではないでしょうか?

お答え： (1) それではガウスの立つ瀬がない．実際，e^{-x^2} の原始関数（ガウスの誤差関数という）によって「正規分布に従う確率変数がある区間に値をとる確率」がわかる．そして，正規分布を使わない日常生活なんて考えられない．(2) 考えないことにする関数の範囲はどのように決めるのか．原始関数が初等関数にならないような関数はたくさんあるが，一般に，具体的に与えられた関数の原始関数が初等関数ではないことの証明は困難．すなわち，積分を考える関数の範囲を確定することが出来なくなる．

質問 7： 初等関数以外を用いることが可能でも，積分不可能な例を教えて下さい． **お答え：**例 5.1.

質問 8： 定義域の区間で連続でなくても積分できる関数がありますか． **お答え：**例 5.2.

質問 9： $\int \sqrt{(x\text{ の 3 次式})}$ を含む積分が初等関数で表せないと聞いたのですが，2 次までならできるのに，なぜ 3 次になった途端に表せなくなるのですか? **お答え：**こういう証明は自明でない，一言で言えない，と講義で説明した．

質問 10： ただの積分計算がパズルみたいで楽しいです．演習問題以外に，面白い積分またはそのような問題が載っている本等をご存知でしたら教えて下さい． **お答え：**微積分の教科書，参考書は「星の数ほど」（慣用句）出版されています．図書館や書店で見てみましょう．米国の Calculus の教科書が，親切かつ問題が多くてよいと思います．

質問 11： 積分可能な関数と連続関数は同一のものと考えてもいいのでしょうか．

お答え： いいえ．連続関数は積分可能ですが，逆は言えません．例 5.3.

質問 12： 講義ノート 50p 「分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ に対して各区間 $[x_{j-1}, x_j]$ には有理数も無理数も含まれる」について，分割の幅が 0 に近づいてもそのように言えるのはなぜでしょうか? Δ の極限と有理数無理数の稠密さをどのように比べればよいのでしょうか． **お答え：**区間 $[a, b]$ $(a < b)$ 内には有理数も無理数も存在する（有理数，無理数は実数全体の中で「稠密」である）．ご質問の中の「稠密」という語で大丈夫ですが．

質問 13： C^n 級の関数 $f(x)$ に対して，関数 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ は C^{n+1} 級ですか．

お答え： どうでしょう．C^k 級の定義を考えればすぐわかると思いますが

質問 14： 原始関数と不定積分の違いをもう一度教えてください． **お答え：**一度も説明していない気がします．

質問 15： $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき，$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$ も曲線の長さのような意味をもちますか．

お答え： 曲線の長さです．

質問 16： 曲線の長さを求める際，$\dot{x}(t)$ の微分の記合（原文ママ：記号のことか）を使っていたのですが，未だ使い分け方が曖昧なので教えていただけるとありがたいです．

お答え： ここでは分数によって式が煩雑になるのを避けるために $\dot{}$ を使いました．必要なら $\dot{} = d/dt$ などの注釈をつける必要があるかもしれませんね．

質問 17： 板書されていた「有界閉」とは，講義ノートでいうの「コンパクト部分集合」と同じですか． **お答え：** はい．

質問 18： 板書で $\mathcal{L}(\gamma)=\int_a^b|\dot\gamma(t)|\,dt$ と書いてあった．$\mathcal{L}(t)=\int_a^b|\dot\gamma(t)|\,dt$.

お答え： いいえ，もとの方が正しいです．$\mathcal{L}(\gamma)$ は「曲線 γ の長さ」．γ を与えればきまる数です．t で積分しているので右辺は t を含まない量です．したがって $\mathcal{L}(t)$ と「t によってきまる値」のように書くのは誤りです．

質問 19： D が有限で閉区間である領域は a, b 定数 ($a \leqq b$), $g_1(x)$, $g_2(x)$ を x の関数として必ず $D=\{(x,y)|g_1(x)\leqq y\leqq g_2(x)\}$ の形で表現できるのか． **お答え：** 「有限で閉区間である領域」とはかなり「自己流」の言葉ですね．この言葉の意味がわからないので，回答は不能です．「有界閉集合」「コンパクト集合」のことを言っているのであれば，できません．たとえばドーナツ型の領域に境界をつけたもの．

質問 20： 講義ノート p57 式 (5.7) の 1 行下に，累次積分の定義が書かれているが，3 回くりかえす 3 変数関数はどうなるか教えてほしいです． **お答え：** やってみます．

質問 21： $\int_0^1[\ ]_{y=x}^{y=2x}\,dx$ の $y=2x$, $y=x$ が単に $2x$, x とかかれないのは，[ ] の中に 2 つの変数が混在しているからですか．それとも $\int_0^1\,dx$ があるからですか． **お答え：** 前者．

質問 22： 積分で $[\frac{1}{3}y^3]_{y=x^3}^{y=1}$ は $[\frac{1}{3}y^3]_{x^3}^{1}$ でいいですか?

お答え： いいですが，[ ] 内に x, y が混在すると意味が曖昧になりますね．

質問 23： 重積分の形の表記は大事ですか（累次積分の形だけで十分な気がしたので）．

お答え： 大事です．積分範囲 D の形が複雑だと $\iint_D dx\,dy$ を累次積分の形に書き直すことが自明でないです．つねに累次積分の記法を用いなければならないとすると，積分の式が書けなくなります．値を求めるなら，累次積分にする必要がありますが，値を求めるよりも「値が存在する」ことが理論的に重要な場合（実は物理や工学でそういうケースが多い）には，簡単に書ける重積分の記法が必要です．

質問 24： 重積分を変形してできるものでなくても，1 変数関数の定積分を 2 回繰り返す (P57 より抜粋) ものは累次積分と呼ぶのですか? **お答え：** はい．

質問 25： n 重積分において，1 変数関数の定積分を n 回繰り返すことを累次積分というのですか? 例えば，3 重積分において，先に 2 重積分を行い，後で積分を行う場合は累次積分といえますか． **お答え：** あまり厳密な使い分けはしていないようです．値を計算するためには，先に行う 2 重積分も累次積分になおす必要がありますね．

質問 26： 累次積分の際の $\int_b^a[{}_d^c f(x,y)\,dy]\,dx$；[ ] は規則ですか． **お答え：** $[{}_d^c$ の意味は？この記号は使わないと思う．

質問 27： 何故累次積分の式で ( ) ではなく [ ] を使うのか．

お答え： 普通の括弧の意味で角括弧を使うということですね．黒板に手書きするとき (と $\int$ が並ぶと見苦しいから．

質問 28： 重積分を求めようとしたら偏微分のように x，y 両方求めなければなりませんか．

お答え： 重積分は「ひとつの数」です．「x と y の両方」は意味がない．

質問 29： 積分とは $f(x,y)\,dx\,dy$ の総和のことと理解したのですが，それを日本語に翻訳するとしたら，領域 D の微小領域の総和ということになりますか? **お答え：** 情報が落ちています．微小領域の面積と関数の値の積の総和．

質問 30： 講義の中で，積分区間に等号をつけないと気持ちの悪いものが出て来ると仰っていたが，等号をつけなくても積分可能だということでしょうか． **お答え：** 今回の範囲では「つけなくてはだめ」．

質問 31： 二重積分はどんな被積分関数や領域でも積分する文字の順番は気にしなくてよいのでしょうか．偏微分のときの交換法則のように，被積分関数や領域について条件はあるのでしょうか．

お答え： 積分範囲が「面積確定集合」で，被積分関数が連続なら大丈夫．

質問 32： 重積分を x からやった方が楽か y からやった方が楽かは，どのタイミングで判断するのですか．やはり文字が 1 種類になるタイミングでしょうか． **お答え：** 人によるのでは?

質問 33： 重積分において，計算の順序により手間が違うことは分かりましたが，楽な順番を見分けるコツはありますか?/ 重積分を解く際に，はじめに y で積分するか x で積分するかどちらがいいか考えるためのコツはありますか？ **お答え：** 両方やってみる．最後まで出来る方が楽．

質問 34： 重積分において，x から積分するか y から積分するかは計算してみないと分からないのは，積分区間に依存するからですか? **お答え：** どちらで計算してもよい．ところで，何が「積分区間に依存する」とお考えなのですか?

質問 35： 授業中に少し偏積分と言っていますが，記号とかはあったりしますか? **お答え：** ありません．

質問 36： 原子関数（原文ママ：原始関数のこと？）を表す際に $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ のように表記した場合，積分定数は加える必要はないのですか?

お答え： 「$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ は e^{-x^2} の原始関数である」は（定数をかかなくてもこのままで厳密に）正しい．一方,「関数 e^{-x^2} の原始関数は $c+\int_0^x e^{-t^2}\,dt$（c は定数）である」というときは定数 c が必要．違いはわかりますね．

質問 37： 原子関数（原文ママ：原始関数のこと？）は実数の数だけ存在するという話しがありましたが，原始関数（山田注：これはあってますね）を求める問題では ＋ 積分定数とすればよいのですか．

お答え： 次の定理が成り立ちます．「区間 I で定義された関数 f に対して，F, G がともに f の原始関数ならば $G(x)-F(x)$ は区間 I 上定数である．」ですから「区間 I で定義された関数の原始関数を全て求める」のなら原始関数 $F(x)$ をひとつみつけて，それに定数を加えた形のものが全てとなります．定義域が区間でない場合はすこし複雑ですね．たとえば $f(x)=1/x$ $(x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty))$ に対して $F(x)=\log|x|$ は f の原始関数ですが，$G(x)=\begin{cases}\log x & (x>0)\\ 5+\log(-x) & (x<0)\end{cases}$ も f の原始関数で，$G-F$ は定数ではありません．

質問 38： $F''(x)$ の原始関数の原始関数を表す記号はありますか．　**お答え：**$F(x)$ では?

質問 39： 授業中に Green の定理がいつでも使えるわけではないとおっしゃっていましたが，例えばどういった時だとつかえないんですか?　**お答え：**Green の定理のステートメントは講義で扱っていません．まず主張（ステートメント）を調べてみましょう．その仮定が満たされないときは使えないんです（当たり前ですが）．

質問 40： 授業中に 2 次元，3 次元の錐について，“底面” × 高さ ÷ 次元で “体積” が求まるというものがありました．そこで一次元の場合について考えてみました．“底面” は次元がひとつ下がるので，点であり，つまり “錐” は直線になると考えた．底面は 0 次元なので，“面積” は単位である 1 を考える．つまり “底面” × 高さ ÷ 次元 = 高さとなり，1 次元の “体積” を長さと考えると “底面” × 高さ ÷ 次元 = “体積” が成り立つと考えた．この考えはありでしょうか．　**お答え：**ありです．

質問 41： 錐体の体積計算で 1/3 をかけるのは，2 次元から 3 次元へと積分する際に $\frac{1}{3}$ という係数がでてくる，ということでよろしいでしょうか．　**お答え：**よろしいかどうか分かりません．なぜなら「2 次元から 3 次元へと積分する」というフレーズが何を表しているかわからないからです．

質問 42： 授業中に三角錐の体積（原文ママ：講義では一般に「錐の体積」の説明をした）の話がありましたが，どうして 2 次元で割るのでしょうか（原文ママ：次元で割るとは?）三角形の面積との対応を考えるとなんとなくそんな気もしますが，立体の図を想像してみてもどうすれば $\frac{1}{3}$ 倍になるのかイメージができません．あと 4 次元というのは時間も考慮するということでよいですか?　**お答え：**前半：高等学校の教科書に，錐の体積の導出方法が書いてある．後半：いいえ「4 つの数の組全体の集合」です．一つ一つの数に意味をつけるのは自由ですが，意味の付け方はさまざま「空間の 3 つの座標と時間」というのはそのうちのたった一つの例にすぎません．

質問 43： 重積分と偏微分は多変数関数を 1 つの変数で処理するという点で似ている気がしたのですが，何か関係性はありますか．　**お答え：**あります（としか答えようがない）．ところで「関係」と言わず「関係性」といったのはなぜ?

質問 44： f が C^2 級の関数で $z(x,y)=xf(x-y)+yg(-x+y)$ のとき ... という問題において（山田注：g の説明はないが，まあいいですね）一変数なので $f'(x-y)$ とかき $f_x(x-y)$ とかかないとのことですが，使い分け方がイマイチわかりませんし，なぜ一変数になっているのでしょうか?　**お答え：**「イマイチ」については講義資料 6, 質問 73 参照．「なぜ一変数」ですが，何が一変数なのか明示しましょう．ここでは $f(t)$ が一変数関数．たとえば $f(t)=\sin t$ とすれば $f'(t)=\cos t$．また $f(x-y)=\sin(x-y)$ 全体は 2 変数関数だが f 自身は一変数関数．

質問 45： 偏微分では ∂ を使う一方で，重積分においては ∂ でなく，d を使うということでしたが，積分で ∂ を使うことはありますか？　**お答え：**この文脈ではありません．

質問 46： $\tilde{f}$ の他にも，領域 $\widetilde{D}$ などのようにいろんな記号で「˜」は使われるのでしょうか．　**お答え：**はい．

質問 47： 講義ノートの 40 ページで「$\overline{S}_\Delta(f)$」や「$\underline{S}_\Delta(f)$」と書いてありますが，S の上と下に書いてある棒線の意味を教えてください．　**お答え：**線自体に意味があるのではなく，「$\overline{S}$」で一文字．定義は (5.1) 式．

質問 48： 講議ノート（原文ママ：講義です）51 ページ，命題 5.7 について，$\varDelta$ や $x_0, x_1, \dots$ の右上に記されている $[n]$ は何を表しているのですか?　**お答え：**「区間の分割」の列を考えています．一つ一つの分割を $\varDelta_n$ と書いてもよいのですが，x_n のような下付きの番号と形としても区別したかったので，上付きの番号を [ ] で括りました．

質問 49： 教科書に $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおいたとき，$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$ と書かれていたのですが，よくわかりません．解説をお願いします．　**お答え：**第 6 節のテーマ．

質問 50： 2 変数関数 $f(x,y)$ を重積分する際に，積分する範囲が $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1\}$ のような場合，$x=0$ または $y=0$ で 2 分割して積分すれば解けそうですが，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ として置換積分のようなこともできるでしょうか．　**お答え：**前半の「2 分割したら解ける」とはどういうことでしょうか．1 変数関数で類似のこと（たとえば $[-1,1]$ での積分）をするとき，積分区間を 2 分割すれば値がわかりますか? 変数変換は第 6 節のテーマ．

質問 51： 多変数関数の重積分のやり方はわかったのですが，これは何を意味しているかを教えて下さい．

お答え： 「これ」は何を指しているか教えて下さい．「多変数関数の重積分」ですか，それとも「やり方」ですか?

質問 52： 方向微分が何のために出てきたのかわかりません．何をするためのものかがよくわかりません．

お答え： ある方向に (x,y) が変化したときの関数の変化率．

質問 53： 2 変数関数のグラフは立体的なものになるかと思いますが，重積分は dx と dy と $f(x,y)$ をかけているので体積になるような気がしました．なぜ 3 つの量をかけて 2 次元である面積が出てくるのでしょうか．

お答え： なぜ面積と思ったのでしょうか．体積とは「何の」体積でしょうか．ある種の体積を求めるのに重積分は使えますが，闇雲に「体積」というのではなく「図形＊＊＊の体積」と明示的に述べる習慣をつけましょう．

質問 54： 重積分の定義は体積を求めることですか．/重積分でやっていることは体積を求めていることと同じですか．

お答え： 何の体積を求めることだと思っていますか．

質問 55： $\iint_I f(x,y)\,dx\,dy$ では (x,y) の定義される領域を底面とする $z=f(x,y)$ で表される立体の体積を求められるということで合っていますか? **お答え：**合っていません． $z=f(x,y)$ で表される図形の体積は 0 です．

質問 56： 今日やった重積分の例において，一回目の積分で断面積をもとめて二回目で体積を求めると考えると理解がしやすいのですが，やはりこういった理解は好ましくないのでしょうか．

お答え： まず「何の」断面積を求めて「何の」体積を求めるのかを正確に述べてください．こういった理解は重要ですが，この理解を「全て」と考えて，変数が多い関数の積分が「イメージできない」と駄々をこねてはいけません．

質問 57： 重積分でやっていることは体積を求めているのと同じことですか?

お答え： 何の体積を求めているのでしょう．「何の」が示されないと同じかどうか判断できません．

質問 58： 3 変数関数 (ex. (x,y,z)) の場合，重積分で体積を得ることができますか． **お答え：**第 6 節を見よ（次回）．

質問 59： 3 変数以上の関数での積分を 2 変数関数のようにイメージできません．イメージする必要はありますか．

お答え： 講義ノート 58 ページ一番下の例（密度から質量を求める積分）は直観的に理解しておくべきだと思います．(3 変数関数の積分だから「4 次元空間の図形の体積で直観的には分からない」と理解を拒否してはいけません．

質問 60： $\iiint \leftarrow$ こういうのを見た事があるんですけど，これはいわゆる偏積分を 2 回やって 2 文字を 1 つにすれば同じことでしょうか． **お答え：**偏積分を 2 回やると，2 文字が 0 文字になるのでは?

質問 61： 直積の $I=[a,b]\times[c,d]=\displaystyle\bigcup_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}} \quad \Delta_{jk},\qquad \Delta_{jk}$ の意味が分かりません．

お答え： 講義ノートのどこのこと？（一番右が欠けている?）このうちどの部分の意味がわからないのでしょう．

質問 62： 5.2 多変数関数の積分において $\displaystyle\bigcup_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}}$ はどういう意味ですか．

お答え： j, k をこの範囲で動かして全部の合併集合をとる．

質問 63： 先生は全微分のイメージは傾きではなく，なんでしたっけ，微少変化でしたっけ? 全微分は傾きではないのは分かりますが，他のイメージがつきません． **お答え：**今回の授業では全微分については語っていません．「傾き」という言葉，よく使われますが「＊＊＊の傾き」の「＊＊＊」が正確に述べられないなら使うべきではありません．

質問 64： 講義ノート P51 の下から 2 行目の “積分可能性” とはどう調べるのですか．

お答え： この文脈では「仮定」されたことだから調べる必要はない．

質問 65： $\partial\xi\eta$ は $\partial\xi\partial\eta$ ということでよいか． **お答え：**あまりこういう記号は使わないのでよくない．

質問 66： 陰関数定理において，$F_y\neq 0$ なら $y=f(x)$ と表せ，$F_y=0$ （山田注：$F_x\neq 0$） $x=g(y)$ と表せるとあったが，どちらか一方が成り立てばなめらかな曲線ということか． **お答え：**講義ノート 46 ページ，命題 4.15．

質問 67： 累次積分と重積分の関係がよくわかりましたが，二変数関数の積分はどうやって図に表現しましたか．(山田注：講義で扱った例について) **お答え：**積分を図で表したのではなく，積分範囲を図で表した．

質問 68： 講義中の例題の $\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx\right]dy$ が理解できません．$\int_0^1\left[\int_{\sqrt[3]{y}}^1 f(x,y)\,dx\right]dy$ でないでしょうか．

お答え： 違います．積分範囲 $D=\{(x,y)|x^3\leqq y, 0\leqq x\leqq 1\}$ の y を一つ固定したとき x の動く範囲はどこでしょう．

質問 69： $\int_{x^3}^1 \frac{x^5 y}{(1+x^6)^2}\,dy=\frac{x^5}{(1+x^6)^2}\int_{x^3}^1 y\,dy$ と授業でやっていましたが， x も y の関数なのにどうしてイコールで計算してるのですか? **お答え：**どうして x が y の関数だと思っているのですか?

質問 70： 積分の定義は結局 $|\Delta|\to 0$ で $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)(x_{j+1}-x_j)\to S$ (一定値) ということでよいか．

お答え： 「結局」といっているが，この文は self-contained でないのでよいかどうかわからない．

質問 71： 累次積分の積分の順序の入れかえがよくわからないので詳しくお願いします．

お答え： どこまでわかっていて，どこからわからないのでしょう．まさか最初から最後まで全部詳しく説明しろ，っていうことじゃないですよね（そういうときは「よくわからない」ではなく「全くわからない」という）．

質問 72： d'Alembert の解法とありましたが，授業内のように微分方程式を解くこと全体がこの解法であるということですか． **お答え：**そうです．

質問 73： 陰関数は 1 つ以外の変数が決まっても残りの 1 つの変数が確定するとは限らない時もあるのに関数と呼ぶのですか． **お答え：**なので「陰」「関数」と分けるのではなく「陰関数」という一つの語と思って下さい．

質問 74： 金曜日の授業で先生が $(F_x, F_y) \perp (1, \frac{\partial f}{\partial x})$ と書いたが，$(F_x, F_y) \perp (-1, \frac{\partial f}{\partial x})$ だと思います．

お答え： 違います．もとの式が正しいです．

質問 75： 5/11 の講義について $F(x, y, z) = 0$ という陰関数を用いて $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$ ということを証明なさっていましたが，証明途中がよくわからなかったのので質問させていただきます．$z = f(x, y)$ とおき，$F(x, y, f(x, y)) = 0$ とおいたあと，x について偏微分すると $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ と板書なさりましたが，$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ にならない理由がわからないです．$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ であり，省略しているのですか．

お答え： そうです．微分している式で x と y は独立な変数だから．

質問 76： 陰関数定理を「$\dots F(x_0, y_0) = 0$ かつ $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ のとき (x_0, y_0) の近くで」と先生は板書していましたが，自分の使っているの本には「近くで」のところが「近傍」と書かれていました．「近く」と「近傍」は同じ意味ですか．同じじゃないなら何が違うのですか．また，この場合はどちらを使うのが正しいですか．

お答え： 数学的には「近傍」というのが正しい．ただし「近傍」は厳密に定義のある語だからその意味を踏まえて使うべき．この講義ではそこをさぼっているので日常語の「近く」をつかってごまかしている．

質問 77： 何かの関数，たとえば $F(x, y, z) = 0$（山田注：これでは関数ではないのでは？）があるときに，まず F を z で偏微分し，その次に z を x で偏微分する式をかくとします．講義では $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} = \dots$ で書かれていましたが，$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \dots$ と書かれていました．どちらの順で書いても合ってますか？ **お答え：**実数の積は交換可能ですね．

質問 78： 講義ノート 48 ページ問題 4-9 について，解説の最後の箇条書きにある $\varphi'(0) = 1$ に関してですが，$\varphi(x) = -\frac{F_x}{F_y}$ なので，$\varphi'(x) = \frac{x}{y}\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$ になると思うのですが，すると $\varphi'(0) = 0$ になってしまうんです．どこが間違っているのでしょうか．何卒ご指摘の程お願いいたします． **お答え：**$a = 0$ のケースですね．考えている点では $y = 0$ となるので，$\varphi'(0) = 0$ とはいえません（陰関数の微分公式が使えないケース）．

質問 79： 「系」について，P 52，系 5.10 は事実 5.10 ではないのですか．また P54 系 5.16 は定義 5.16 ではないのですか． **お答え：**違います．数学の文脈で「系」corollary とは，直前の定理等から容易に導かれる定理のこと．

質問 80： "どんな関数は原始関数をもつか" について 2 つ目に☆連続関数 in $[a, b]$ "この区間で微分可能" と書いてあったように見えたのですが "in" とは何ですか． **お答え：**on です．

質問 81： 大学で勉強する積分も，置換積分や部分積分などの高校で習った方法のみで通用しますか?

お答え： 高校で習った方法「のみ」が何か分かりませんが，「計算は高等学校で習ったようにやる」と講義で述べました．

質問 82： $\int_a^b f(x)\,dx := \int_I f(x)\,dx$ にある「:=」の「:」とはどんな意味ですか． **お答え：**講義資料 6，質問 44．

質問 83： 今回の講義ではある区間の重積分を解きましたが，重積分，多重積分の不定積分を解く機会はありますか?

お答え： 「解く」という動詞はこういうときに使うものでしょうか．「求める」では? ちなみに「原始関数に相当するものは考えれない」「微積分の基本定理に相当するものはない」という話をしましたね．

質問 84： 今回教えていただいた重積分は計算結果として定数になるという意味で高校で学習した範囲でいう定積分にあたると思うのですが，不定積分にあたるものも今後学習するのですか．

お答え： そういうものがない，ということを述べたはず．Green-Stokes の定理などという言葉も出てきた．

質問 85： 重積分はどういう時につかいますか? **お答え：**多変数関数の値のある種の総和を求めたいとき．

質問 86： 微分の授業で行列について触れていましたが，線形代数学第一を微分積分学第一より先にやらないのって何か理由があるんですか? **お答え：**数学系以外の系，数学以外の科目の担当者からの強い要望です．

質問 87： 中間試験予告のプリントで "山田" が "山●" （山田注：真ん中の水平な線分が消えている）になっていた．微分積分学第 1 講義資料 9 で "山田" が "山〇" （山田注：下の水平な線分が消えている）になっていた．"田" が可哀想です． **お答え：**そうですか...

質問 88： 「微分積分学第一・中間試験予告」のプリントにおいて，山田教授の名前が（略）となっていました（おそらくコピー機の問題だと思うのですが）． **お答え：**もう少し太いフォントにした方がよいですかね．

質問 89： 山田先生のミスは見当たらなかったが，物理の先生が「向かって」と書くところを「向って」など，送りがなを間違えていたので報告しておきます． **お答え：**間違っているのでしょうか．「送り仮名の付け方」（昭和 56 年 10 月 1 日，内閣告示第 3 号改正）の通則 4 の「許容」の項目で「向って」は許容されているように見えますが．

質問 90： 特にありません．/ないです． **お答え：**me, too.