3. 連続性と微分可能性

3.1　1 変数関数の微分可能性と連続性 (復習)

定義 3.1. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の 1 変数関数 f が $a \in I$ で**連続**であるとは [1)]

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである [2)]．関数 f が定義域 I の各点で連続なとき f は I で連続である，あるいは**連続関数**であるという．

例 3.2.　(1)　次の関数（例 1.4 (2)）は 0 で連続でない：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

実際 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x\to -0} f(x) = 1$ であるが $f(0) = 0$.

(2)　次の関数 f は 0 で連続でない：

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

実際，$x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$ で定めると，$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の極限値は 0 であるが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(y_n) = -1$ となるので $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない．　◇

16 ページで定義を与えた微分可能性から連続性が従う：

定理 3.3. 1 変数関数 f が a で微分可能ならば a で連続である．

証明. 極限の性質から

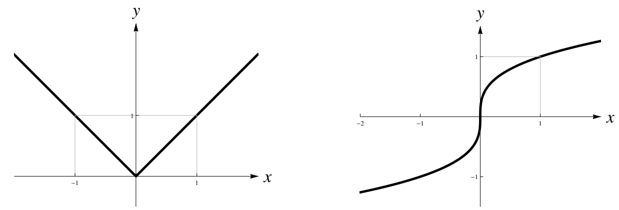
$$\begin{aligned}\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) - f(a) &= \lim_{x\to a}\bigl(f(x) - f(a)\bigr) = \lim_{h \to 0}\bigl(f(a+h) - f(a)\bigr) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} h\right) = \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)\left(\lim_{h \to 0} h\right) \\ &= f'(a) \times 0 = 0.\end{aligned}$$

□

*) 2018 年 4 月 23 日/30 日 (2018 年 4 月 27 日訂正)

1) 連続: continuous; 連続関数: a continuous function.

2) すなわち x が a に近づくとき，その近づき方によらず $f(x)$ が $f(a)$ に近づく．例 3.2 (2) 参照．きちんとした極限の議論は後期に扱う．



$f(x) = |x|$　　$f(x) = \sqrt[3]{x}$

図 3.1　例 3.4

例 3.4.　(1)　関数 $f(x) = |x|$ は 0 で微分可能でない（図 3.1 左）．

(2)　$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $(x \in \mathbb{R})$ で与えられる関数 f は 0 で微分可能でない．実際

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{h}^2} \longrightarrow +\infty \qquad (h \to 0)$$

である．関数 f のグラフは，なめらかな曲線である（図 3.1 右）．

(3)　例 1.4 の (1) で挙げた関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は 0 で (したがって $\mathbb{R}$ 全体で) 微分可能で，

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる．実際 $f'(0)$ は “はさみうちの原理” [3)] から求まる．　◇

■ **C^k-級関数**　区間 I で定義された 1 変数関数 f が区間 I で

- C^0-級である [4)] とは I で連続なこと，
- C^1-級であるとは，I で微分可能で，導関数 f' が I で連続となること，
- C^k-級（$k > 0$ は整数）であるとは、f の k 次導関数 $f^{(k)}$ が存在して，それが I で連続となること，
- C^∞-級であるとは，全ての負でない整数 k に対して C^k-級であることとする．

3) はさみうちの原理: the squeeze theorem.

4) C^0-級: of class C^0; C^r-級: of class C^r; C^∞-級: of class C^∞ (C-infinity).

例 3.5.
- 例 3.4 (3) の関数 f は $\mathbb{R}$ で微分可能だが，C^1-級ではない．実際，例 3.2 の (2) から導関数 f' は 0 で連続でない．
- 第 1 回の初等関数は，定義域に含まれる開区間で C^∞-級である．ただし冪乗根 $\sqrt[n]{x}$ は $\{x \mid x > 0\}$ で定義されているとする． ♢

3.2 多変数関数の連続性・微分可能性

多変数関数の微分可能性の定義を与えよう．簡単のために話を 2 変数関数に限るが，以下の議論は n 変数関数 $(n > 2)$ に容易に一般化できる．

■ **領域** 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**領域**であるとは，それが “ひと続きで端をもたない” ことである [5]．たとえば $\mathbb{R}^2$ 全体，開円板や開長方形 [6]

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}, \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, c < y < d\}$$

は領域である．ただし実定数 r, a, b, c, d は $r > 0$, $a < b$, $c < d$ をみたす．

■ **極限** 2 変数関数 f の極限値が A，すなわち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A \qquad \Bigl(f(x, y) \to A \qquad \bigl((x, y) \to (a, b)\bigr)\Bigr) \tag{3.1}$$

をみたす [7] とは (x, y) が**どのような経路で** (a, b) **に近づいても** $f(x, y)$ の値が A に近づくことである [8].」という．とくに $(a+h, b+k)$ が (a, b) に近づくことは (h, k) が $(0, 0)$ に近づくことと同じだから

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a + h, b + k). \tag{3.2}$$

事実 3.6. 2 変数関数 α, β, f が

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h, k) = 0, \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \beta(h, k) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A$$

をみたしているならば $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f\bigl(a + \alpha(h, k), b + \beta(h, k)\bigr) = A$.

[5] 領域: a domain; もう少し正確な意味はこの節末で述べる

[6] 開円板: an open disc; 開長方形: an open rectangle (rectangular domain).

[7] $(x, y) \to (a, b)$ のときの極限を考える際，f は (a, b) で定義されていなくてもよい（いてもよい）．極限値：the limit.

[8] 極限に関するもう少し厳密な議論は後期の微分積分学第二で扱う．ここでは以下を認めて議論をすすめる．

事実 3.7. (1) (3.1) が成り立つための必要十分条件は，0 に収束する**任意の** 2 組の数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して [9] 次が成り立つことである：

$$\lim_{n\to\infty} f(a + h_n, b + k_n) = A.$$

(2) (3.1) が **成り立たない**ための必要十分条件は，$\{f(a + h_n, b + k_n)\}$ が A に収束しないように，0 に収束する数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ を**うまく選ぶことができる**ことである．

例 3.8. (1) $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \bigl((x, y) \neq (0, 0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x, y) = (0, 0)\bigr) \end{cases}$$

を考える（問題 2-6 参照）．いま，$h_n = 1/n$, $k_n = 1/n$, $k'_n = -1/n$ で 3 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$, $\{k'_n\}$ を定めると，これらは 0 に収束し，

$$\lim_{n\to\infty} f(h_n, k_n) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} f(h_n, k'_n) = -1$$

となる．この第 1 式と事実 3.7 (1) から，$(x, y) \to (0, 0)$ のとき $f(x, y)$ は 1 以外の実数を極限値にもたない．また第 2 式から $f(x, y)$ は -1 以外の実数を極限値にもたない．これらから $(x, y) \to (0, 0)$ のとき $f(x, y)$ は極限値をもたないことがわかる．

一方，0 でない y をひとつ固定して，1 変数関数の極限値をとると

$$\lim_{x\to0} f(x, y) = \lim_{x\to0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{だから} \quad \lim_{y\to0}\Bigl(\lim_{x\to0} f(x, y)\Bigr) = 0,$$

同様に

$$\lim_{y\to0} f(x, y) = \lim_{y\to0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{だから} \quad \lim_{x\to0}\Bigl(\lim_{y\to0} f(x, y)\Bigr) = 0.$$

(2) $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ は $(x, y) \to (0, 0)$ としたときの極限値をもたない．一方，

$$\lim_{x\to0}\Bigl(\lim_{y\to0} f(x, y)\Bigr) = 1, \qquad \lim_{y\to0}\Bigl(\lim_{x\to0} f(x, y)\Bigr) = -1.$$

(3) 関数 $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ は $(x, y) \to (0, 0)$ で極限値 0 をもつ．実際，$r > 0$ と θ を用いて $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と書くと，

[9] 任意（にんい）の: arbitrary; 任意の X に対して P が成り立つ: P holds for an arbitrary X.

$(x,y)\to(0,0)$ と $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ とは同値である．いま

$$(*)\qquad f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=\tfrac{1}{2}r^2\sin 2\theta\cos 2\theta=\tfrac{1}{4}r^2\sin 4\theta$$

だが，$|\sin 4\theta|\leqq 1$ だから，$(*)$ の右辺は $r\to 0$ で 0 に近づく． ◇

■ **連続性**　第 3.1 節にならって 2 変数関数の連続性を次のように定義する：

定義 3.9. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 f が $(a,b)\in D$ で**連続**であるとは，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

が成り立つことである．関数 f が定義域 D のすべての点で連続であるとき，f は D で連続，あるいは D 上の連続関数であるという．

例 3.10. (1)　例 3.8 の (1) の関数 f は $(0,0)$ で連続でない．しかし，偏微分可能で $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ である．

(2)　次の関数（問題 2-9）は $(0,0)$ で連続である（例 3.8 (3)）：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}\qquad\diamondsuit$$

変数 x, y と定数に加法・乗法を有限回施して得られる式を**多項式**，多項式の商の形を**有理式**という．多項式であらわされる関数は連続，有理式であらわされる関数は分母が 0 とならない点で連続である．

■ **微分可能性**　例 3.10 の (1) の関数は，偏微分可能だが連続ではない．そのような関数を微分可能とは言いがたいだろう．

定義 3.11. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ で**微分可能**であるとは，定数 A, B をうまくとり，十分小さい $(h,k)\neq(0,0)$ に対して

$$(3.3)\qquad f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

により $\varepsilon(h,k)$ を定義すると，次が成り立つことである：

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0.$$

命題 3.12. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能で，(3.3) の定数 A, B は $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ でなければならない．

証明． 式 (3.3) の $k=0$ として

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\frac{Ah+\varepsilon(h,0)\sqrt{h^2}}{h}=A+\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}$$

だが，$-|\varepsilon(h,0)|\leqq\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}\leqq|\varepsilon(h,0)|$，かつ $h\to 0$ とすると $\varepsilon(h,0)\to 0$ だから

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=f_x(a,b).$$

一方 $h=0$ とすることで $B=f_y(a,b)$ も得られる． □

したがって定義 3.11 は次と同値である：

定理 3.13. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ で微分可能であるための必要十分条件は，f が (a,b) で偏微分可能で，

$$(3.4)\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$
$$\left(\varepsilon(h,k):=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

が成り立つことである．

命題 3.14. 関数 f が (a,b) で微分可能ならば (a,b) で連続である．

証明． 式 (3.3) の両辺で $(h,k)\to(0,0)$ とすればよい． □

注意 3.15. 命題 3.12 の逆は成立しない．実際，例 3.8 (1) の f は $(0,0)$ で偏微分可能だが連続でない（例 3.10 参照）．したがって，命題 3.14 の対偶から微分可能でない．

■ **微分可能性の十分条件**

定理 3.16. 領域 D で定義された 2 変数関数 f が D の各点で偏微分可能，かつ偏導関数 f_x, f_y が D で連続ならば f は D の各点で微分可能である．

証明には平均値の定理を用いる．節末（35 ページ）参照．

例 3.17. 定理 3.16 の逆は成立しない．実際，

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr) \end{cases}$$

は $(0,0)$ で微分可能であるが f_x, f_y は原点で連続でない． ♢

■ 偏微分の順序交換定理

定理 3.18. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f の 2 つの 2 次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が存在してともに連続であるとき，$f_{xy}=f_{yx}$ が成立する．

■ C^k-級関数 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f が D で

- C^0-級とは D で連続なこと，
- C^1-級とは D の各点で偏微分可能で，f_x, f_y が D で連続となること，
- C^2-級であるとは，f の 2 次偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} が存在して，それらがすべて D で連続であること，
- C^k-級（k は正の整数）とは f の k 次偏導関数が存在し，それらがすべて D 上で連続となること，
- C^∞-級とは，非負整数 k に対して C^k-級となることである．

系 3.19. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 f が

(1) 微分可能ならば C^0-級である（命題 3.14）．

(2) C^1-級ならば微分可能である（定理 3.16）．

(3) $k\leqq m$ のとき C^m-級ならば C^k-級である．

(4) C^2-級ならば $f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ（定理 3.18）．

3.3 全微分と近似式

関数 $f(x,y)$ が定義域の点 $P=(a,b)$ で微分可能であるとき，

$$(df)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \tag{3.5}$$

で与えられる 2 次行ベクトル $(df)_P$ を**関数 f の点 P における全微分**または**微分**という [10]．さらに，(x,y) に対して 2 次行ベクトル $\bigl(f_x(x,y), f_y(x,y)\bigr)$ を対応させる規則 df を f の**全微分**または**微分**という：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{3.6}$$

例 3.20. 関数 $\varphi(x,y)=x$, $\psi(x,y)=y$ に対して $d\varphi=(1,0)$, $d\psi=(0,1)$ である．このことを次のように書く：$dx=(1,0)$, $dy=(0,1)$． ♢

例 3.20 の記号を用いれば (3.6) は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{3.7}$$

と書くことができる．これが通常の全微分の表し方である．

例 3.21. 微分可能性の定義式 (3.3) の最後の項は，(h,k) と $(0,0)$ の距離 $\sqrt{h^2+k^2}$ が十分小さいときに，それにくらべてずっと小さくなるので，(h,k) を $(\varDelta x,\varDelta y)$ と書けば，これが $(0,0)$ に十分に近いときは，近似式

$$\varDelta f \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\varDelta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\varDelta y, \tag{3.8}$$

$$\bigl(\varDelta f := f(a+\varDelta x, b+\varDelta y) - f(a,b)\bigr)$$

が成り立つ．ただし $\fallingdotseq$ はおよそ等しいことを表す．この近似式の誤差を評価するには，微分積分学第二で学ぶテイラーの定理を用いる． ♢

■ 曲線に沿う微分 数直線上の区間 I 上で定義された 1 変数関数 $x(t)$, $y(t)$ の組 $\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ は I から座標平面 $\mathbb{R}^2$ への写像と思える：

$$\gamma\colon I\ni t\longmapsto \gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)\in\mathbb{R}^2.$$

このような写像を**曲線**あるいは**曲線のパラメータ表示**という [11]．以下，曲線と言えば $x(t)$, $y(t)$ が微分可能となるもののみを考える [12]．このことを "γ

---

[10] 数を 2 つ横に並べたものを 2 次行ベクトルという．これは $(1,2)$-型の行列とみなすことができる．行列とベクトルの演算については第 4 回参照．; 行ベクトル：a row vector 列ベクトル：a column vector; 全微分：a total differential; 微分：a differential.

[11] 曲線：a curve; 曲線のパラメータ表示：a parametric representation of the curve.

[12] だからといって γ の像が "なめらか" な図形になるとは限らない．たとえば曲線 $\gamma(t)=\bigl(t-\sin t, 1-\cos t\bigr)$ はサイクロイド (cycloid) を与える．このパラメータ表示の 2 つの成分はともに微分可能（さらに C^∞-級）であるが，$t=2n\pi$ に対応する点 $(2n\pi,0)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\dots)$ で尖った形をしている．

は微分可能” という．微分可能な曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ に対して

$$\dot\gamma(t)=\frac{d\gamma}{dt}(t)=\bigl(\dot x(t),\dot y(t)\bigr)=\left(\frac{dx}{dt}(t),\frac{dy}{dt}(t)\right)$$

を曲線上の点 $\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ における**速度ベクトル**という[13]．パラメータ t の値を時刻とみなし，$\gamma(t)$ を時刻 t における点の位置とみなすことによって，曲線 $\gamma(t)$ は平面上の点の運動を表していると考えられる．このとき，速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ は時刻 t における運動する点の**速度**とみなすことができる．

例 3.22. (1) ベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ と点 $P=(a,b)$ に対して

$$\gamma(t)=\bigl(a+tv_1,b+tv_2\bigr)$$

は $t=0$ で点 P を通り一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で直線上を運動する点，すなわち P を通り $\boldsymbol{v}$ に平行な直線を表す（図 3.2 左）．

(2) パラメータ s に対して $\sigma(s)=(\cos s,\sin s)$ $(-\pi<s<\pi)$ は原点を中心とする半径 1 の円から $(-1,0)$ を除いた部分を表す[14]．速度ベクトルは $(-\sin s,\cos s)$ となるから，速さは 1 で一定である（図 3.2 中央）．

(3) 次も原点を中心とする半径 1 の円から $(-1,0)$ を除いた図形を表す：

$$\tilde\sigma(t):=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\qquad(-\infty<t<\infty).$$

この式で $t=\tan\frac{s}{2}$ とすると，(2) の表示が得られる（図 3.2 右）．◇

2 変数関数 $f(x,y)$ と曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ に対して，

$$F(t)=f\bigl(x(t),y(t)\bigr). \tag{3.9}$$

は，1 変数関数を与える．

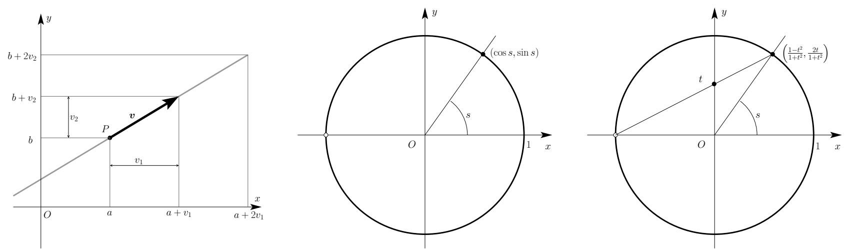
命題 3.23. 微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ と微分可能な曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ に対して，(3.9) は 1 変数関数として微分可能で，次が成り立つ：

$$\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t).$$

証明． 実数 t を一つ固定して，δ の 1 変数関数 $h(\delta)$, $k(\delta)$ をそれぞれ

$$h(\delta):=x(t+\delta)-x(t),\qquad k(\delta):=y(t+\delta)-y(t)$$

[13] 速度ベクトル：the velocity vector; 速さ：the speed．違いを思い出しておこう．
[14] 直線：a line; 円：a circle.



(1) (2) (3)

図 3.2 例 3.22

とすると，x, y の連続性から $\delta\to0$ のとき $h(\delta)$, $k(\delta)\to0$．さらに

$$\varepsilon_1(\delta):=\frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta}-\dot x(t)=\frac{h(\delta)}{\delta}-\dot x(t),\qquad \varepsilon_2(\delta):=\frac{k(\delta)}{\delta}-\dot y(t)$$

とおけば，$x(t)$, $y(t)$ の微分可能性より $\delta\to0$ のとき，$\varepsilon_1(\delta)$, $\varepsilon_2(\delta)\to0$．これらの記号を用いると，$f$ の微分可能性から

$$\begin{aligned}F(t+\delta)-F(t)&=f\bigl(x(t+\delta),y(t+\delta)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t)\bigr)\\&=f\bigl(x(t)+h(\delta),y(t)+k(\delta)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t)\bigr)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)h(\delta)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)k(\delta)+\varepsilon\bigl(h(\delta),k(\delta)\bigr)\sqrt{h(\delta)^2+k(\delta)^2}\end{aligned}$$

となる．ただし $\varepsilon(h,k)$ は $(h,k)\to(0,0)$ のときに 0 に近づく関数である．したがって，

$$\begin{aligned}&\frac{F(t+\delta)-F(t)}{\delta}\\&\quad=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\bigl(\dot x(t)+\varepsilon_1(\delta)\bigr)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\bigl(\dot y(t)+\varepsilon_2(\delta)\bigr)\\&\qquad+\varepsilon\bigl(h(\delta),k(\delta)\bigr)\frac{|\delta|}{\delta}\sqrt{\bigl(\dot x(t)+\varepsilon_1(\delta)\bigr)^2+\bigl(\dot y(t)+\varepsilon_2(\delta)\bigr)^2}.\end{aligned}$$

ここで $\delta\to0$ のとき $\varepsilon_j(\delta)\to0$, $(j=1,2)$，また $\bigl(h(\delta),k(\delta)\bigr)\to(0,0)$ なので $\varepsilon(h(\delta),k(\delta))\to0$．さらに $\bigl||\delta|/\delta\bigr|=1$ であることに注意すると

$$F'(t)=\lim_{\delta\to0}\frac{F(t+\delta)-F(t)}{\delta}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\dot x(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\dot y(t)\qquad\square$$

領域

この節の冒頭で “領域” のいい加減な定義を与えた．整合性のため，ここで領域の定義を与えるが，当面はあまり気にしなくてよい．

定義． 閉区間 $I=[a,b]$ 上の 2 つの連続関数 x, y の組 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ を座標平面 $\mathbb{R}^2$ の**連続な道**，点 $\gamma(a)$，$\gamma(b)$ をそれぞれ γ の**始点**，**終点**とよぶ．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**連結**であるとは，D の各点 P, Q に対して P を始点，Q を終点とする連続な道 $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ で各 $\gamma(t)$ $(a\leqq t\leqq b)$ が D の点となるものが存在することをである．（この概念は正確には "弧状連結性" という）．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 $P=(a,b)$ と正の実数 ε に対して

$$U_\varepsilon(P):=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,(x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2\}\subset\mathbb{R}^2$$

で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合を "点 P を中心とした半径 ε の**円板**" という．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**開集合**[15] であるとは D の各点 P に対して $U_\varepsilon(P)\subset D$ となるような正の数 ε をとることができることである．

ここでは証明を与えないが，次の事実は重要である：

事実． 連続関数 $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対して，集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F(x,y)>0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である．

定義． 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の連結かつ開集合となる部分集合を**領域**という．

定理 3.16・定理 3.18 の証明

これらの定理を証明するためには，高等学校で学んだ平均値の定理[16] を用いる：

定理 (平均値の定理)**．** 関数 f が区間 I で微分可能であるとき，点 $a\in I$ と $a+h\in I$ となるような h に対して，次をみたす θ が存在する：

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h\qquad(0<\theta<1).$$

定理 3.16 の証明． 点 $(a,b)\in D$ で微分可能であることを示す：0 に近い h, k に対して (3.4) のように $\varepsilon(h,k)$ を定め，これが 0 に近づくことを示す．いま，k を一つ固定して $F(h):=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)$ とおくと，f の偏微分可能性から F は h の微分可能な関数で $F'(h)=f_x(a+h,b+k)$, $F(0)=0$ が成り立つ．そこで F に平均値の定理を適用すると

$$F(h)=F(h)-F(0)=F'(\theta h)h=f_x(a+\theta h,b+k)h\qquad(0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する．同様に $G(k)=f(a,b+k)-f(a,b)$ とおくと，k ごとに

$$G(k)=G'(\delta k)k=f_y(a,b+\delta k)k\qquad(0<\delta<1)$$

をみたす δ をとることができる．したがって

$$\varepsilon(h,k)=\frac{F(h)+G(k)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

[15] 開集合: an open set; 連結集合: a connected set; 円板: a disc (disk).
[16] 平均値の定理: the mean value theorem. 証明は後期の微分積分学第二で与える．

$$=\bigl(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a,b)\bigr)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}+\bigl(f_y(a,b+\delta k)-f_y(a,b)\bigr)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

となるが，$|\theta h|<|h|$, $|\delta k|<|k|$ と，$|h/\sqrt{h^2+k^2}|\leqq 1$, $|k/\sqrt{h^2+k^2}|\leqq 1$ から，右辺は $(h,k)\to(0,0)$ のときに 0 に近づく． □

定理 3.18 の証明． 点 $(a,b)\in D$ を固定して $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ を示す．いま，

$$V=V(h,k):=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)}{hk}$$

とおく．ただし，h, k は十分 0 に近い数とする．このとき

$$V=\frac{1}{k}\frac{F(h)-F(0)}{h}\qquad\bigl(F(t):=f(a+t,b+k)-f(a+t,b)\bigr)$$

だが，$F'(t)=f_x(a+t,b+k)-f_x(a+t,b)$ に注意して平均値の定理を適用すれば，

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{k}F'(\theta_1 h)=\frac{1}{k}\bigl(f_x(a+\theta_1 h,b+k)-f_x(a+\theta_1 h,b)\bigr)\\&=\frac{1}{k}\bigl(F_1(k)-F_1(0)\bigr)\qquad(F_1(t):=f_x(a+\theta_1 h,b+t))\end{aligned}$$

となる $\theta_1\in(0,1)$ が存在する．さらに $F_1'(t)=f_{xy}(a+\theta_1 h,b+t)$ に注意すれば，平均値の定理から次を満たす θ_1, θ_2 が存在することがわかる：

$$(\star)\qquad V=f_{xy}(a+\theta_1 h,b+\theta_2 k)\qquad\bigl(\theta_1,\theta_2\in(0,1)\bigr).$$

同様に $V=(G(k)-G(0))/(hk)$ $(G(t):=f(a+h,b+t)-f(a,b+t))$ とすると

$$(\star\star)\qquad V=f_{yx}(a+\varphi_1 h,b+\varphi_2 k)\qquad\bigl(\varphi_1,\varphi_2\in(0,1)\bigr)$$

となる φ_1, φ_2 が存在する．f_{xy}, f_{yx} の連続性から $(\star)$, $(\star\star)$ の $(h,k)\to(0,0)$ とする極限をとれば，$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ が成り立つことがわかる． □

問　　題　　3

3-1 例 3.4, 3.8, 3.10, 3.17 を確かめなさい．

3-2 2 変数関数が連続であること，偏微分可能であること，微分可能であること，C^1-級であることの間の関係を整理しなさい．
例：微分可能 $\Rightarrow$ 連続；連続 $\not\Rightarrow$ 微分可能．実際 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ は $(0,0)$ で連続だが微分可能でない．

3-3 関数 $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$ に対して $f(0.1,0.2)$ の近似値を式 (3.8) を用いて求めなさい．また，計算機などで求めた値とどれくらい近いか調べなさい．

3-4 2 変数関数 f が "標高を表すスカラ場"（例 2.2），曲線 $\gamma(t)$ が，時刻 t とともに移動する人の運動と思うとき，式 (3.9) で表される 1 変数関数はどのようなものか，説明しなさい．