I. 不定値計量

■ 線形代数の復習　この節では，簡単のために，実数を成分とする n 次正方行列のことを単に正方行列ということにする．正方行列 A に対してその転置行列を ${}^tA$，単位行列を I （次数を特定したいときは I_n）と書く [1]．

- 正方行列 P が**直交行列**であるとは，${}^tPP = P{}^tP = I$ が成り立つことである．
- 正方行列 A が（実）**対称行列**であるとは，${}^tA = A$ が成り立つことである．
- 実対称行列の固有値は実数で，一つの固有値の固有空間の次元はその重複度と一致する．
- 実対称行列は直交行列によって対角化できる．すなわち，実対称行列 A に対して直交行列 P で

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

  となるものが存在する．ここで $\mathrm{diag}(\dots)$ は "$\dots$" を対角成分にもつ対角行列を表す．とくに $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ は A の固有値をその重複度の数ずつ並べたものである．

以下，V を実数体 $\mathbb{R}$ を係数とする n 次元線形空間とする．

■ 双線形形式と 2 次形式

定義 1.1. 線形空間 V 上の**双線形形式** [2] とは，写像 $q\colon V \times V \to \mathbb{R}$ で次を満たすものである：

- 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して写像 $q(\boldsymbol{x}, \cdot)\colon V \to \mathbb{R}$ および $q(\cdot, \boldsymbol{x})\colon V \to \mathbb{R}$ が線形（双線形性）．

[*] 2017 年 04 月 11 日 (2017 年 5 月 2 日訂正)
[1] 正方行列：a square matrix；転置：transposition；単位行列：the identity matrix.
[2] 双線形形式：a bilinear form; 2 次形式：a quadratic form.

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成り立つ（対称性）．

双線形形式 q に附随する **2 次形式**とは $\tilde{q}\colon V \ni \boldsymbol{x} \mapsto q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ のことである．

補題 1.2. 線形空間 V 上の 2 つの双線形形式 q, r に附随する 2 次形式をそれぞれ $\tilde{q}, \tilde{r}$ とするとき，$\tilde{q} = \tilde{r}$ なら $q = r$ である．

証明. 各 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde{q}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ &= \tilde{q}(\boldsymbol{x}) + 2q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \tilde{q}(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

だから

$$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big(\tilde{q}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \tilde{q}(\boldsymbol{x}) - \tilde{q}(\boldsymbol{y})\big)$$

なので，双線形形式 q は $\tilde{q}$ のみから定まる．　□

すなわち，双線形形式は 2 次形式により定まるので，双線形形式のことを 2 次形式とよぶことも多い．

例 1.3. 実数を成分とする n 次対称行列 $A = (a_{ij})$ と列ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$ に対して ${}^t\hat{\boldsymbol{x}}A\hat{\boldsymbol{y}}$ は 1 次の正方行列となるのでこれをスカラと見なすと，写像

$$q_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \longmapsto {}^t\hat{\boldsymbol{x}}A\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

が定まる．ただし ${}^t\hat{\boldsymbol{x}}$ は列ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}$ を転置して得られる行ベクトルを表す．すると，行列の積の性質から写像 q_A は $\mathbb{R}^n$ の双線形形式であることがわかる．とくに単位行列 I に対して q_I は $\mathbb{R}^n$ の標準内積を与えている．

逆に $\mathbb{R}^n$ の双線形形式 q があたえられた時 $q = q_A$ をみたす対称行列 A が存在する．　◇

■ 双線形形式の表現行列 線形空間 V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ をひと組とる．すると同型写像

$$(1.2)\quad V \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\left(\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

が定まる．$\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x} \in V$ の基底 $[\boldsymbol{v}_j]$ に関する**成分**とよぶ．

補題 1.4. 線形空間 V 上の双線形形式 q に対して

$$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \Big(= q_A(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \Big) = {}^t\hat{\boldsymbol{x}} A \hat{\boldsymbol{y}}$$

となるような n 次対称行列 A がただ一つ存在する．ただし $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する成分である．

証明． 行列 $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} := q(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$ で定めればよい（問題 I-2）． □

補題 1.4 の行列 A を，双線形形式 q の基底 $[\boldsymbol{v}_j]$ に関する**表現行列**とよぶ．

補題 1.5. 線形空間 V の 2 つの基底 $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ と $[\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n]$ の間の基底変換行列を $U = (u^i_j) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ とする：

$$[\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n] = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]U \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{w}_j = \sum_{i=1}^n u^i_j \boldsymbol{v}_i \quad (j = 1, \dots, n).$$

ただし $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ は実数を成分とする n 次正則行列全体の集合（**一般線形群**[3]）を表す．このとき，双線形形式 q の，基底 $[\boldsymbol{v}_j]$ に関する表現行列 A と 基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する表現行列 $\tilde{A}$ は関係式

$$\tilde{A} = {}^tUAU$$

を満たす．

[3] 一般線形群：the general linear group.

証明． ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} \in V$ を

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]\hat{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n]\tilde{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]\hat{\boldsymbol{y}} = [\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n]\tilde{\boldsymbol{y}}$$

と成分表示すると，

$$\hat{\boldsymbol{x}} = U\tilde{\boldsymbol{x}}, \qquad \hat{\boldsymbol{y}} = U\tilde{\boldsymbol{y}} \quad \text{となるので，} \quad q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\hat{\boldsymbol{x}} A \hat{\boldsymbol{y}} = {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}\, {}^tUAU\tilde{\boldsymbol{y}}.$$

ここで $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は任意だから結論が得られる． □

■ 双線形形式の非退化性

定義 1.6. 線形空間 V 上の双線形形式 q が

- **正定値**（**半正定値**）[4] であるとは，任意の $\boldsymbol{x} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$（$\geqq 0$） となることである．
- **負定値**であるとは，$-q$ が正定値となることである．
- **非退化**であるとは，「$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ が任意の $\boldsymbol{y} \in V$ に対して成り立つならば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つことである．

例 1.7. 線形代数で学んだ線形空間の内積とは，正定値の双線形形式のことである． ◇

注意 1.8. 正定値（負定値）双線形形式は非退化である．実際，$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ がすべての $\boldsymbol{y}$ に対して成り立つならばとくに $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$．ここで q が正定値（負定値）かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なら $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ (< 0) となることから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とならなければならない．

■ 非退化 2 次形式の符号

命題 1.9. 線形空間 V 上の双線形形式 q が正定値（半正定値，負定値，非退化）であるための必要十分条件は，q の表現行列の固有値が全て正（非負，負，零でない）となることである．この条件は V の基底によらない．

[4] 正定値：positive definite；半正定値：positive semi-definite；負定値：negative definite；不定値：indefinite；非退化：non-degenerate.

証明. 基底 $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ に関する q の表現行列を A とする．これは実対称行列だから，固有値 λ_j $(j=1,\dots,n)$ はすべて実数で，直交行列 P により対角化できる：

$$ {}^tPAP=\Lambda,\quad \Lambda:=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix},\quad {}^tPP=I=\text{単位行列}. $$

そこで $[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]=[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]P$ とおくと $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する q の表現行列は Λ．ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する成分をそれぞれ $\hat{\boldsymbol{x}}={}^t(x_1,\dots,x_n)$，$\hat{\boldsymbol{y}}={}^t(y_1,\dots,y_n)$ と書けば

$$ q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^n\lambda_jx_jy_j $$

となる．これを用いれば結論が得られる（問題 I-3）． □

線形空間 V の部分空間 W をとると，V 上の双線形形式 $q\colon V\times V\to\mathbb{R}$ を W に制限した写像 $q|_W\colon W\times W\to\mathbb{R}$ は W 上の双線形形式を与える．

定義 1.10. 線形空間 V 上の非退化対称双線形形式 q に対して

- V の部分空間 W で $q|_W$ が W 上の正定値双線形形式となるような W の次元の最大値を n_+ と書き，q の **正の符号数**,
- V の部分空間 W で $q|_W$ が W 上の負定値双線形形式となるような W の次元の最大値を n_- と書き，q の **負の符号数**

という．これらの組 (n_+,n_-) を q の**符号数** [5] という．

例 1.11. 線形空間 V 上の正定値（負定値）な 2 次形式の符号数は $(n,0)$ $((0,n))$ である．ただし n は V の次元である． ♢

定理 1.12. 線形空間 V 上の非退化対称双線形形式 q の正（負）の符号数 n_+ (n_-) は，q の表現行列の正（負）の固有値の個数である．とくに

$$ n_++n_-=n=\dim V. $$

証明. 命題 1.9 の証明のように，基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する q の表現行列は対角行列 Λ としてよい．さらに Λ の対角成分はすべて 0 でないから，$\lambda_1,\dots,\lambda_t$ は負，$\lambda_{t+1},\dots,\lambda_n$ は正としてよい．すると，$\{\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_t\}$ で生成される V の部分空間上で q は負定値．したがって $n_-\geqq t$．また，$\{\boldsymbol{w}_{t+1},\dots,\boldsymbol{w}_n\}$ で生成される部分空間上で q は正定値．したがって $n_+\geqq n-t$:

$$ n_-\geqq t,\qquad n_+\geqq n-t \tag{1.3} $$

一方，V の部分空間 W_+ (W_-) で $q|_{W_+}$ $(q|_{W_-})$ が正定値（負定値）であり，かつ次元が n_+ (n_-) となるものが存在する．ここで $\boldsymbol{x}\in W_+\cap W_-$ とすると $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\leqq 0$ かつ $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$ だから $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$．$q|_{W_+}$ が正定値であることに注意すれば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ したがって $W_+\cap W_-=\{\boldsymbol{0}\}$ となるので，

$$ n_++n_-=\dim W_++\dim W_-\leqq\dim V=n. $$

したがって (1.3) は

$$ n_-\geqq t,\qquad n-n_-\geqq n-t\qquad n-n_+\geqq t,\qquad n_+\geqq n-t $$

となるので $n_-=t$, $n_+=n-t$. □

注意 1.13. 定理 1.12 から，表現行列の正，負の固有値の個数は基底のとり方によらないことがわかる．このことは「対称行列 A の正，負の固有値の個数は変換 $A\to{}^tUAU$ (U は正則行列）で不変」であることと同値である．

定義 1.14. 有限次元線形空間 V 上の非退化対称双線形形式のことを V の**内積**という [6]．内積が一つ与えられている線形空間のことを**内積空間** [7] という．

■ 擬ユークリッド的ベクトル空間 線形空間 $\mathbb{R}^n$ $(n:=s+t\geqq 2,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$ 上で双線形形式

$$ \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle_{s,t}:=-\left(\sum_{j=1}^s v_jw_j\right)+\left(\sum_{k=s+1}^{s+t}v_kw_k\right)\qquad\left(\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix},\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\right) \tag{1.4} $$

[5] 符号数：the signature.

[6] 内積：an inner product.
線形代数で学んだ内積の定義（非退化性ではなく正定値性を仮定する）とは少し違う．

[7] 内積空間：an inner product space, a metric space.

を考えると，これは $\mathbb{R}^n$ 上の符号数 (t,s) の内積を与える．このような内積が与えられた $\mathbb{R}^n$ のことを $\mathbb{R}^n_s$ と書き，符号 (t,s) をもつ**（擬）ユークリッド・ベクトル空間**[8] という．内積 (1.4) は

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle_{s,t} = {}^t\boldsymbol{v} J_{s,t} \boldsymbol{w} \qquad J_{s,t} := \begin{pmatrix} -I_s & O \\ O & I_t \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

と表される．

とくに符号が $(n,0)$ の場合，すなわち内積が正定値の場合は $\mathbb{R}^n_0$ を**ユークリッド・**ベクトル空間[9]，$(n-1,1)$ の場合，すなわち $\mathbb{R}^n_1$ を**ミンコフスキー・**ベクトル空間という．

以下，線形空間 V に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとする．

■ 正規直交基

定義 1.15. 内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が**直交する**[10] とは，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$ が成り立つことである．

定義 1.16. 次元 n の内積空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ が V の**正規直交基**[11] であるとは，

$$|\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle| = \delta_{ij} \qquad (1 \leqq i, j \leqq n)$$

が成り立つことである．

補題 1.17. 正規直交基は V の基底である．

証明． 線形独立性を示せば良い． □

定理 1.18. 内積空間には正規直交基底が存在する．とくに，内積の符号が (t,s) ならば，

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = 0 \quad (i \neq j), \qquad \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = \begin{cases} -1 & (i = 1, \dots, s) \\ 1 & (i = s+1, \dots, s+t) \end{cases} \tag{1.6}$$

[8] 擬ユークリッド・ベクトル空間：a pseudo euclidean vector space.

[9] ユークリッド・ベクトル空間：an euclidean vector space; ミンコフスキー・ベクトル空間：a Minkowski vector space.

[10] 直交する：orthogonal

[11] 正規直交基：an orthonormal basis; pl. orthonormal bases.

を満たす基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ をとることができる．

証明． 命題 1.9 の証明のようにして，V の基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ で，$\langle\ ,\ \rangle$ の表現行列が対角行列になるものが存在する．とくに，負の固有値は s 個，正の固有値は t 個だから，

$$\lambda_j \begin{cases} < 0 & (j = 1, \dots, s) \\ > 0 & (j = s+1, \dots, n) \end{cases}$$

としてよい．今，行列 U を

$$U := \operatorname{diag}\left(1/\sqrt{|\lambda_1|}, \dots, 1/\sqrt{|\lambda_n|}\right)$$

とおく．すると

$${}^tU \Lambda U = \begin{pmatrix} -I_s & O \\ O & I_t \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

となる．ここで I_m は m 次の単位行列，O は適切なサイズの零行列とする．したがって補題 1.5 から $[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n] := [\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n]U$ に関する $\langle\ ,\ \rangle$ の表現行列が (1.7) の行列となる．したがって $[\boldsymbol{e}_j]$ は条件を満たす基底である． □

■ ベクトルの因果特性

定義 1.19. 内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}$ が

- **空間的**[12] であるとは，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるか $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ が成り立つことである．
- **時間的** であるとは，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle < 0$ が成り立つことである．
- **光的** であるとは，$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ が成り立つことである．

これらの性質をベクトルの**因果特性**という[13]．

注意 1.20. 内積が正定値の場合は，すべてのベクトルは空間的である．

[12] 空間的：spacelike, space-like; 時間的：timelike, time-like; 光的：lightlike, light-like, null.

[13] 因果特性：causal character.

これらの用語は，相対性理論においてミンコフスキー・ベクトル空間に対して用いる語に由来している．

■ 直交補空間

定義 1.21. 内積空間 V の部分空間 W が**非退化**であるとは，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の W への制限 $\langle\ ,\ \rangle|_W$ が W 上の非退化内積を与えることである．とくに $\langle\ ,\ \rangle|_W$ の符号を W の符号という．

例 1.22. $\mathbb{R}^2_1$ のベクトル ${}^t(1,1)$ で生成される $\mathbb{R}^2_1$ の部分空間は退化部分空間（非退化でない）である． ◇

定義 1.23. 内積空間 V の部分空間 W に対して

$$W^\perp := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \text{任意の } \boldsymbol{w} \in W \text{ に対して } \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0\}$$

で定まる $W^\perp$ を W の**直交補空間** [14] という．

定理 1.24. 符号 (n_+, n_-) の内積空間 V の非退化部分空間 W の符号が (m_+, m_-) であるとき，$W^\perp$ は 符号 $(n_+ - m_+, n_- - m_-)$ をもつ V の部分空間で，$V = W \oplus W^\perp$ （直和）が成り立つ．

証明. 部分空間 W は非退化なので，定理 1.18 から正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m]$ $(m = m_+ + m_-)$ が存在する．そこで

$$\Phi\colon V \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \Phi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1\rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_m\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

を考えると，これは線形写像で，$W^\perp = \operatorname{Ker}\Phi$ となるので，とくに $W^\perp$ は V の部分空間である．

さらに，Φ は全射である．実際，$\hat{\boldsymbol{x}} := {}^t(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ に対して $\boldsymbol{x} := x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{e}_m$ とおくと $\Phi(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{x}}$．したがって

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim \operatorname{Im}\Phi = \dim V - m = \dim V - \dim W.$$

さらに $W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ．実際 $\boldsymbol{x} \in W \cap W^\perp$ とすると，$\boldsymbol{x} \in W^\perp$ だから，任意の $\boldsymbol{y} \in W$ に対して $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$．ここで $\boldsymbol{x} \in W$ でもあるから，W の非退化性より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

以上から W と $W^\perp$ の和は直和になり，その次元は

$$\dim(W \oplus W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = n = \dim V.$$

[14] 直交補空間：the orthogonal complement.

したがって $W \oplus W^\perp = V$ となる．

次に $W^\perp$ が非退化であることを示す．$\boldsymbol{x} \in W^\perp \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して線形写像

$$\Psi\colon V \ni \boldsymbol{y} \longmapsto \Psi(\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \in \mathbb{R}$$

を考えると，内積が V 上非退化であるから Ψ は零写像にならない．とくに $\operatorname{rank}\Psi = 1$ なので $\dim\operatorname{Ker}\Psi = n - 1$．一方，定義から $W^\perp \subset \operatorname{Ker}\Psi$ だから，

$$\dim(W^\perp \cap \operatorname{Ker}\Psi) = \dim W^\perp - 1.$$

これは，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \neq 0$ となる $\boldsymbol{y} \in W^\perp$ が存在することを示しているので $W^\perp$ は非退化である．

最後に $W^\perp$ の符号数を求めよう．W の正規直交基 $[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m]$ と $W^\perp$ の正規直交基底 $[\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_{n-m}]$ をとると，$[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_{n-m}]$ は V の正規直交基底で，その表現行列は $1, -1$ を対角成分にもつ対角行列である．とくに対角成分で 1 であるものの個数は W と $W^\perp$ の正の符号数の和となるが，一方，これは V の正の符号数だから，結論が得られる． □

例 1.25. n 次元ミンコフスキー・ベクトル空間 V（すなわち，符号数 $(n-1, 1)$ の内積をもつ内積空間）の時間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v}$ に直交するベクトル全体のなす部分空間（すまわち $(\mathbb{R}\boldsymbol{v})^\perp$．簡単のため $\boldsymbol{v}^\perp$ と書く．）は V の空間的な $n-1$ 次元部分空間である．

また，零ベクトルでない空間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v}^\perp$ はミンコフスキー・ベクトル空間である． ◇

■ 擬直交変換

定義 1.26. 内積空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ で内積を保つ，すなわち

$$\langle f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w})\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V)$$

を満たすものを**（擬）直交変換** [15] という．

補題 1.27. 擬直交変換は全単射である．

証明. 同じ次元の線形空間の間の線形写像であるから，単射であることを示せば十分である．擬直交変換 f に対して $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ を満たすものをとる．すると，

$$\langle f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{w}\rangle = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad \langle f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{w}\rangle = \langle f(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{w}\rangle$$

[15] 擬直交変換：a pseudo orthogonal transformation.

が任意の $\boldsymbol{w} \in V$ に対して成り立つから，とくに

$$\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{z})\rangle = \langle f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{z})\rangle \qquad (\boldsymbol{z} \in V)$$

が成り立つ．ここで，擬直交性から

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle \qquad \text{すなわち} \quad \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = 0$$

が任意の $\boldsymbol{z} \in V$ に対して成立する．したがって，内積の非退化性より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. □

補題 1.28. 与えられた内積空間の擬直交変換全体は写像の合成に関して群をなす.

証明. 補題 1.27 から擬直交変換は逆写像をもつことがわかる. □

記号 1.29. 内積空間 V の擬直交変換全体のなす群を $\mathrm{O}(V)$ と書く．とくに $\mathbb{R}^n_t$ の擬直交変換全体を $\mathrm{O}(n,t)$ と表す.

$\mathbb{R}^n_t$（線形空間としては $\mathbb{R}^n$）の線形変換をその表現行列と同一視すれば,

$$\mathrm{O}(n,t) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid {}^tAJ_{t,n-t}A = J_{t,n-t}\}$$

と表すことができる．ただし $J_{t,n-t}$ は式 (1.5) で与えられる n 次正方行列である.

問　題　I

I-1 $m \times n$ 行列 C に対して，$A := {}^tCC$ とおくと A は n 次の対称行列である．この行列 A から例 1.3 のように定まる $\mathbb{R}^n$ の双線形形式を q_A とする.

(1) q_A は半正定値であることを示しなさい.

(2) q_A が正定値になるためには C はどのような条件を満たさなければならないか.

I-2 補題 1.4 を証明しなさい.

I-3 命題 1.9 の証明を完成させなさい.

I-4 (1) $n = 2$ のとき $\mathrm{O}(2,t)$ $(t = 0,1)$ を求めなさい.

(2) $\mathrm{O}(2,0) \cap \mathrm{O}(2,1)$ はどんな集合か.

I-5 定理 1.24 で「W が非退化部分空間である」という仮定が必要であることを示しなさい.

II. 擬ユークリッド空間

一般に，n 次元ベクトル空間に符号 $(n-t,t)$ をもつ内積が与えられているとき，この符号に関する正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ $(j=1,\dots,n)$ をとり，この基底に関する成分を考えることで，内積を保つ同型写像

$$V \ni \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \mapsto {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n_t$$

が定まる．したがって，有限次元の内積空間は擬ユークリッド空間と，内積までこめて同一視できる．以下，内積空間としては $\mathbb{R}^n_t$ のみを考えることにする．

■ **擬直交変換**　前回の (1.5) のように，正の数 $n \geqq 2$ と負でない整数 t $(0 \leqq t \leqq n)$ に対して

$$J_{t,n-t} := \begin{pmatrix} -I_t & O \\ O & I_{n-t} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I_p \text{ は } p \text{ 次単位行列,} \\ O \text{ は適切な型の零行列} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

で n 次正方行列 $J_{n-t,t}$ を定義すると，$\mathbb{R}^n_t$ の内積は

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x} J_{n-t,t} \boldsymbol{y} \tag{2.2}$$

で与えられている．線形同型 $\mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^n_t$ でこの内積を保つものを**擬直交変換**，その（表現行列の）全体の集合を $\mathrm{O}(n,t)$ と書いた（記号 1.29）：

$$\mathrm{O}(n,t) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid {}^tAJ_{t,n-t}A = J_{t,n-t}\}. \tag{2.3}$$

集合 $\mathrm{O}(n,t)$ は行列の積により群をなす．行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} A_{11} : t \times t \text{ 型;} & A_{12} : t \times (n-t) \text{ 型} \\ A_{21} : (n-t) \times t \text{ 型;} & A_{22} : (n-t) \times (n-t) \text{ 型} \end{cases} \tag{2.4}$$

と分割しておこう．

*) 2017 年 04 月 18 日 (2017 年 4 月 25 日訂正)

補題 2.1.

(1) 行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ の行列式は 1 または -1 である．

(2) 行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ を (2.4) のように分割すると，$|\det A_{11}| \geqq 1$，$|\det A_{22}| \geqq 1$ が成り立つ．

証明． 式 (2.3) の定義式の行列式をとれば (1) が得られる．また，(2.4) の形の A が (2.3) の定義式を満たすならば，その左上の $t \times t$ の小行列は

$$-{}^tA_{11}A_{11} + {}^tA_{21}A_{21} = -I_t$$

を満たす．このことから $(\det A_{11})^2 = \det({}^tA_{11}A_{11}) \geqq 1$ が得られる（問題 II-1）．□

記号 2.2. 正の整数 n と $t \geqq 0$ に対して

$$\mathrm{SO}(n,t) := \{A \in \mathrm{O}(n,t) \mid \det A = 1\},$$

と書く．さらに $n \geqq 2$，$t \geqq 1$ の場合，

$$\mathrm{SO}_+(n,t) := \{A \in \mathrm{SO}(n,t) \mid \det A_{11} \geqq 1\}$$

と定める．ただし A_{11} は A を (2.4) のように分割したときの「左上」の小行列である．

注意 2.3. 実数を成分とする n 次正方行列全体の集合 $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視すれば，$\mathrm{O}(n,t)$ は $\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の実解析的な**閉部分多様体**となっている．とくに，群演算はこの実解析多様体の構造に関して実解析的なので，$\mathrm{O}(n,t)$ は**リー群** である．ところで，$\mathrm{O}(n,t)$ は連結ではない．実際

$$\det\colon \mathrm{O}(n,t) \ni A \longmapsto \det A \in \mathbb{R}$$

は連続写像だが，$\det \mathrm{O}(n,t) = \{-1,1\}$ は連結でない．そこで，$\mathrm{O}(n,t)$ の指数 2 の部分群 $\mathrm{SO}(n,t)$ を考えると，$t=0$ のときは $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n,0)$ は連結である [1]．この群 $\mathrm{SO}(n)$ を**特殊直交群** [2] とよぶ．一方 $n \geqq 2$，$t \geqq 1$ のと

[1] 証明は線形代数の応用問題であるが，ここでは与えない．

[2] リー群：a Lie group; 直交群 $\mathrm{O}(n)$：the orthogonal group; 擬直交群 $\mathrm{O}(n,t)$：the pseudo orthogonal group; 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$：the special orthogonal group.

きは $\mathrm{SO}(n,t)$ も連結ではない．実際，連続写像

$$\det{}'\colon \mathrm{SO}(n,t) \ni A \longmapsto \det A_{11} \in \mathbb{R}$$

を考える．ただし A_{11} は A を (2.4) のように分割したときの左上の成分である．このとき $\det{}'(\mathrm{SO}(n,t)) = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ であることがわかるが，像が連結でないので $\mathrm{SO}(n,t)$ は連結でない． そこで部分群 $\mathrm{SO}_+(n,t)$ を考えると（問題 II-2），$\mathrm{SO}_+(n,t)$ は連結となることがわかる．

■ **擬ユークリッド空間**　集合 $\mathbb{R}^n$ の 2 点 P，Q に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} := (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n) \in \mathbb{R}^n$$

を対応させる規則を考える．ただし $\mathrm{P} = (p_1,\dots,p_n)$，$\mathrm{Q} = (q_1,\dots,q_n)$ である．点 P，Q が住んでいる空間は「我々の住む空間」のモデルと考え，原点に特別な意味を持たせないこととする．一方 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は P から Q への変位を表すので，零ベクトルには絶対的な意味がある．すなわち $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の住みかはベクトル空間としての $\mathbb{R}^n$ である．このように思ったとき，点 P の住みかとしての $\mathbb{R}^n$ を**アファイン空間**，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の住みかとしての $\mathbb{R}^n$ を，そのアファイン空間に付随するベクトル空間という．[3] さらにベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ をユークリッド・ベクトル空間と見なすと，

$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \right\rangle} \tag{2.5}$$

でアファイン空間 $\mathbb{R}^n$ に距離（**ユークリッド距離**）を入れることができるので，その距離から $\mathbb{R}^n$ に位相が入る．この位相を $\mathbb{R}^n$ の**ユークリッド位相**という [4]．

補題 2.4. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のユークリッド位相は，任意の一次関数 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続にする最弱の位相である．

[3] アファイン空間：an affine space; アファイン空間に付随するベクトル空間：the vector space associated with the affine space.

[4] ユークリッド距離：the Euclidean distance; ユークリッド位相：the Euclidean topology.

証明. 位相空間論の最初に学んだように多項式はユークリッド空間上の連続関数であるから，とくに一次関数は連続関数．

したがって，任意の一次関数が連続になるような $\mathbb{R}^n$ の位相が与えられたとき，その位相はユークリッド位相を含む（開集合族の包含関係の意味）ということを示せ良い．

座標関数 $r_j : (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_j$ は一次関数なので，仮定より連続．したがって $\{(x_1,\dots,x_n) \mid a < x_j < b\} = r_j^{-1}\big((a,b)\big)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合．各座標関数でこのような開集合をとって共通部分をとることで，開区間の直積集合は開集合であることがわかる．ところで開区間の直積集合を基とする位相はユークリッド位相と一致するから結論が得られた． □

以下，集合 $\mathbb{R}^n$ には補題 2.4 のような（ユークリッド空間としての）位相が与えられているとすると，$\mathbb{R}^n$ は n 次元多様体で，各点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と同一視できる．接空間 $T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n_t$ と同一視して内積を与えた多様体を**擬ユークリッド空間** [5] という．擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ 上の 2 点 P, Q に対して $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \in \mathbb{R}^n_t$ を考えることができる．

定義 2.5. アファイン空間の間の写像 $f\colon \mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^n_t$ が**等長変換** [6] であるとは，任意の $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n_t$ に対して

$$\left\langle \overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})}, \overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \right\rangle$$

が成り立つことである．

例 2.6. 行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ とベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n_t$

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} \qquad \left(\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n_t\right)$$

で与えられる $f\colon \mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^n_t$ は等長変換である． ◇

定理 2.7. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ の等長変換は例 2.6 の形のものに限る．

注意 2.8. 定理 2.7 は概ね次のステップにより証明される：

- 等長変換の合成は等長変換である．
- $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0})$ で新たな等長変換 g を考えることにより，最初から $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ として一般性を失わない．

[5] 擬ユークリッド空間：a pseudo Euclidean space.

[6] 等長写像：an isometry, an isometric transformation.

- $\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$.
- f は線形写像である．
- $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(A \in \mathrm{O}(n,t))$.

証明の詳細には，ここでは深入りしないが，特にユークリッド空間の場合は，正値性により証明が多少簡単になる．

■ ミンコフスキー・ベクトル空間　特別な場合として，ミンコフスキー・ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ を考える [7]．習慣にしたがって $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の要素を

$$\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

と表す．すなわち，負の符号に対応する成分のインデックスを 0 とする．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を

$$\{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$$

と同一視すると，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ は

$$\boldsymbol{x} = x_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{x}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}_0 = {}^t(1, 0, \dots, 0), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \\ \vec{x} = (0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.6}$$

と書ける．この分解を用いると，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = -x_0y_0 + \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

と書ける．ここで，$\boldsymbol{y} = y_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{y}$ も (2.6) の形の分解で，右辺第 2 項は，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathbb{R}^n$ への制限（$\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積になる）である．

ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ は因果特性（定義 1.19）により 3 種類に分類できる：

- **空間的ベクトル**：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるか，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle > 0$.
- **時間的ベクトル**：$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle < 0$.
- **光的（退化）ベクトル**：$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$.

[7] この講義では正定値内積とミンコフスキー内積を主に扱う．最終回に $\mathbb{R}^n_2$ の部分多様体の例を挙げる．

定義 2.9. 空間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$|\boldsymbol{v}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}$$

を $\boldsymbol{v}$ の大きさという．大きさが 1 である空間的ベクトルを**空間的単位ベクトル**とよぶ．また，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = -1$ をみたす $\boldsymbol{v}$ を**時間的単位ベクトル** [8] という．

命題 2.10. 零でないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ に対して，その**直交補空間**を

$$\boldsymbol{v}^\perp := \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0\}$$

と表すとき，

(1) $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の n 次元線形部分空間である．

(2) $\boldsymbol{v}$ が時間的なら $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の空間的部分空間（空間的ベクトルのみからなる部分空間）である．

(3) $\boldsymbol{v}$ が空間的なら $\boldsymbol{v}^\perp$ への内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の制限は符号 $(n-1, 1)$ をもつ．

(4) $\boldsymbol{v}$ が光的なら，$\boldsymbol{v}^\perp$ は $\boldsymbol{v}$ を含む $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の n 次元線形部分空間で，$\boldsymbol{v}$ のスカラ倍にならない $\boldsymbol{v}^\perp$ の要素は空間的である．したがって $\langle\ ,\ \rangle$ の $\boldsymbol{v}^\perp$ への制限は半正定値である．とくに $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ を生成しない．

証明． 最初の 3 つは定理 1.24 から従う．(4) は次のようにして示される（問題 II-4）：式 (2.6) のように $\boldsymbol{v} = v_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{v}$，$\boldsymbol{w} = w_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{w}$ と分解しておく．$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が光的で互いに直交するならば

$$-v_0^2 + |\vec{v}|^2 = 0, \qquad -w_0^2 + |\vec{w}|^2 = 0, \qquad -v_0w_0 + \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0.$$

このことから $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が一次従属であることが示されれば結論が得られる．□

■ ミンコフスキー・ベクトル空間のベクトル積　まず，3 次元ミンコフスキー・ベクトル空間 $\mathbb{R}^3_1$ を考える：

[8] 空間的（時間的）単位ベクトル：a space-like (time-like) unit vector.

定義 2.11. $\boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2)$, $\boldsymbol{w} = {}^t(w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^3_1$ に対して

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} := {}^t\left(-\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_0 & w_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}\right)$$

で定まる $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の（ミンコフスキー）**ベクトル積** [9] という.

注意 2.12. ミンコフスキー・ベクトル積はユークリッドベクトル積の第 0 成分の符号を変えたものである.

補題 2.13. ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3_1$ に対して

- $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ にともに直交する.
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が空間的なら，$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ は時間的で，次が成り立つ：

$$|\langle \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle| = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle - (\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle)^2.$$

- $\det(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) > 0$. ただし，det は 3 つのベクトルを列ベクトルとみなしてできる 3 次正方行列の行列式を表す.

次に，4 次元ミンコフスキー・ベクトル空間の 3 つのベクトルに対して次のようにベクトル積を定義する：

定義 2.14. ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4_1$ に対して

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} := {}^t\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 & w_2 \end{vmatrix}\right) \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} = {}^t(u_0, u_1, u_2, u_3), \\ \boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2, v_3), \\ \boldsymbol{w} = {}^t(w_0, w_1, w_2, w_3) \end{pmatrix}$$

と定める．とくに $\boldsymbol{u}$ が時間的単位ベクトルで，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}$ に直交するベクトルのときは,

$$\boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w} := \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} \tag{2.8}$$

と書く.

[9] ベクトル積：the vector product.

補題 2.15. $\mathbb{R}^4_1$ の時間的単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ と，$\boldsymbol{u}$ に直交するベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4_1$ に対して

- $\boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ にともに直交する.
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が空間的なら，$\boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}$ は空間的で，次が成り立つ：

$$\langle \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle - (\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle)^2.$$

- $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}) > 0$ ただし，det は 4 つのベクトルを列ベクトルとみなしてできる 4 次正方行列の行列式を表す.

証明は演習問題とする（問題 II-6）.

■ ローレンツ・ミンコフスキー空間　負の符号が 1 であるような擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ を**ローレンツ・ミンコフスキー空間**またはミンコフスキー空間 [10] という．相対性理論に由来するいくつかの言葉の定義を与えておく.

定義 2.16. 点 $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ に対して

- 集合

$$\Lambda_{\mathrm{P}} := \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \mid \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \text{ は光的 }\} \cup \{\mathrm{P}\}$$

  を P における**光錐**または**光円錐** [11] という.
- 集合

$$C_{\mathrm{P}} := \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leqq 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\},$$
$$C^+_{\mathrm{P}} := \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leqq 0, v_0 > 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\},$$
$$C^-_{\mathrm{P}} := \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leqq 0, v_0 < 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\}$$

  をそれぞれ P の**因果集合**，**未来**，**過去**とよぶ [12].
- $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の等長変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ （$A \in \mathrm{O}(n+1, 1)$）を**ローレンツ変換**という．とくに $A \in \mathrm{SO}(n+1, 1)$ の場合を**向きを保つ**ローレンツ変

[10] ローレンツ・ミンコフスキー空間：the Lorentz-Minkowski space.
[11] 光錐，光円錐：the lightcone.
[12] 因果集合：the causal set; 未来：the future；過去：the past.

換，$A \in \mathrm{SO}_+(n+1,1)$ を**向きと時間的向きを保つ**ローレンツ変換あるいは**本義ローレンツ変換**という [13]．

命題 2.17. ローレンツ変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$（$A \in \mathrm{O}(n+1,1)$）は，P における光円錐（因果集合）を $f(\mathrm{P})$ における光円錐（因果集合）に写す．さらに，$A \in \mathrm{SO}_+(n+1,1)$ のときは，P における未来（過去）を $f(\mathrm{P})$ における未来（過去）に写す．

■ 相対性理論との関係　ローレンツ・ミンコフスキー空間は**特殊相対性理論** [14] の舞台である．このことを簡単に説明しておく．

われわれの世界を 3 次元ユークリッド空間とみなし，時刻 x_0 における点 (x_1, x_2, x_3) のことを，時空の点 $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4_1$ と考える．ただし，時間の単位は，真空中の光の速さ c が 1 となるようにとる [15]．

運動する質点の時刻 x_0 における位置を $\gamma(x_0) = (x_1(x_0), x_2(x_0), x_3(x_0)) \in \mathbb{R}^3$ と書くとき，時空の曲線 $\big(x_0, \gamma(x_0)\big) \in \mathbb{R}^4_1$ をこの運動の**世界線**という [16]．とくに，時刻 0 で点 (p_1, p_2, p_3) を通り，光の速さで直進する運動の世界は点 $\mathrm{P} = (0, p_1, p_2, p_3)$ における光円錐 Λ_{P} の母線の一つである．

このような時空の取り方を**慣性系** [17] という．

特殊相対性理論の基本原理は 2 つ：

(R1)　すべての慣性系で真空中の光の速さは同じである（光速度不変の原理）．

(R2)　物理法則は慣性系を取り替えても不変である（相対性原理）．

慣性系の取り替えとは，変換 $f\colon \mathbb{R}^4_1 \to \mathbb{R}^4_1$ のことである．光速度不変の原理 (R1) は，この変換が光円錐を光円錐に写すことを要求する．適切に長さの単位をそろえれば，**このような性質をもつ変換はローレンツ変換に限る**ことを示すことができる．したがって，相対性原理 (R2) は，**物理法則はローレンツ変換で不変な形**をしている，ということにほかならない．

[13] 向きを保つ：orientation preserving; 向きと時間的向きを保つ：orientation and time-orientation preserving, orientation preserving and isochronous.

[14] 特殊相対性理論：the special relativity.

[15] 真空中の光速が cm/s であるとき，時間 ts の変わりに ctm とすることで，時間をメートルで表すことができる．以後，このような単位を用いる．

[16] 世界線：a world line.

[17] 慣性系：an inertial frame of reference. この段階では慣性系は数学的定義をもたない．

この枠組みで，時間的・空間的・光的・未来・過去・因果特性といった語は本来の意味で使われている．

たとえば，$\mathbb{R}^4_1$ の異なる 2 点 P, Q を結ぶ直線が点の運動を表しているとして，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を (2.6) のように分解しておく：

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = p_0 \boldsymbol{e}_0 + \vec{p}.$$

すると，運動する点の $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ における速度ベクトルは

$$\vec{v} := \frac{\vec{p}}{p_0}$$

となる．とくに

- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が空間的ベクトルであるための必要十分条件は $|\vec{v}| > 1$ である．このとき，時空の点 P から Q へ一定の速度で到達するためには，速さが 1（これが光速度）を超えなければならない．
- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が時間的ベクトルであるための必要十分条件は $|\vec{v}| < 1$ となることで，これは $\mathrm{Q} \in C_{\mathrm{P}}$，すなわち Q が P に対して因果的であることと同値である．もし Q が C^+_{P}，すなわち P に対して未来にあるならば，速さ 1 未満の等速度運動で P から Q に到達できる．一方，Q が P の過去 C^-_{P} にあるならば，Q から P に光の速さより遅い等速度運動で到達できる．
- Q が P における光円錐 Λ_{P} に含まれるための必要十分条件は $|\vec{v}| = 1$．すなわち直線 PQ は速さ 1（光の速さ）の運動を表している．すなわち光円錐 Λ_{P} は P を出発する光の世界線全体を表す．

例 2.18. 次元を下げて $\mathbb{R}^2_1$ のローレンツ変換

$$f\colon \mathbb{R}^2_1 \ni \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_1$$

を考える．この変換で，座標系 (x_0, x_1)（x-座標系）での直線 $l_a : x_1 = a$ は座標系 (y_0, y_1)（y-座標系）では直線 $\tilde{l}_a : y_0 = (\coth\theta) y_1 - (\operatorname{sech}\theta) a$ に対応する．すなわち x-座標系で静止している点は，y-座標系では速度 $\tanh\theta$ で

等速度運動しているように見える．すなわち x-座標系は y-座標系に対して速度 $v := \tanh\theta$ で等速度運動している座標系と見なすことができる． $\diamondsuit$

問　題　II

II-1 補題 2.1 の証明を完成させなさい.（ヒント：後半は，対称行列 ${}^tA_{11}A_{11}$ の固有値がすべて 1 以上であることを示せばよい.）

II-2 擬直交群 $\mathrm{O}(n,t)$ の部分集合

$$\mathrm{SO}_+(n,t) := \left\{ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \middle| \det A = 1, \quad \det A_{11} \geqq 1 \right\}$$

は $\mathrm{O}(n,t)$ の部分群になることを示しなさい．ただし (A_{ij}) は式 (2.4) のような分割である．

II-3 (1) $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ は連結かつコンパクトであることを示しなさい．

(2) $\mathrm{SO}_+(2,1) \subset \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ は連結であることを示しなさい．この集合は $\mathbb{R}^4$ のコンパクト部分集合か.

(3) $\mathrm{SO}_+(3,1) \subset \mathrm{M}(3,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^9$ は連結であることを示しなさい.

II-4 命題 2.10 の (4) を示しなさい.（ヒント：部分空間 $\mathbb{R}^n$ 上では内積は正定値なので，コーシー・シュワルツの不等式が成り立つ．この不等式の等号条件を用いればよい.）

II-5 命題 2.17 を示しなさい.

II-6 補題 2.15 を証明しなさい.

III. 超曲面

■ はめ込み　以下，**可微分多様体** [1] という語で C^∞-級多様体を表す．

定義 3.1. 可微分多様体 M と N の間の可微分写像

$$f\colon M \to N$$

が**はめ込み**であるとは，各点 $\mathrm{P} \in M$ で f の微分写像

$$(df)_{\mathrm{P}}\colon T_{\mathrm{P}}M \longrightarrow T_{f(\mathrm{P})}N$$

が単射となることである．ただし $T_{\mathrm{P}}M, T_{f(\mathrm{P})}N$ はそれぞれ M，N の点 P，$f(\mathrm{P})$ における接空間である．

ここで，写像 f の**微分** [2] $(df)_{\mathrm{P}}$ とは，$\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して

$$df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})\colon C^\infty(N) \ni \varphi \longmapsto \boldsymbol{v}(\varphi \circ f) \in \mathbb{R}$$

で定まる $T_{f(\mathrm{P})}N$ の要素 $df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})$ を対応させる線形写像である．

補題 3.2. 多様体 M の点 P に接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して，

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \qquad \gamma(0) = \mathrm{P}, \qquad \frac{d\gamma}{dt}(0) = \boldsymbol{v}$$

を満たす写像（曲線）γ をとると，可微分写像 $f\colon M \to N$ に対して

$$df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\bigl(\gamma(t)\bigr)$$

が成り立つ．

[*] 2017 年 4 月 25 日 (2017 年 5 月 2 日訂正)
[1] 可微分多様体：a differentiable manifold.
[2] 微分：the differential

注意 3.3 (微分写像の表現行列)**.** 写像 f の定義域 M の点 P の回りの局所座標系 $(x_1, \dots, x_m)$ と N の $f(\mathrm{P})$ の回りの N の局所座標系 $(y_1, \dots, y_n)$ をとると，

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\mathrm{P}}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_{\mathrm{P}}\right\}, \qquad \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(\mathrm{P})}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{f(\mathrm{P})}\right\}$$

はそれぞれ $T_{\mathrm{P}}M, T_{f(\mathrm{P})}N$ の基底を与えるが，これらの基底に関する $(df)_{\mathrm{P}}$ の表現行列は f のヤコビ行列

$$Df(\mathrm{P}) := \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_m}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_m}\right) \end{pmatrix}$$

である：

$$\left[(df)_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \dots, (df)_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\right] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)\right] Df(\mathrm{P}).$$

ただし $f(x_1, \dots, x_m)$ の座標系 (y_j) に関する成分を (f_j) と書いた．

とくに N がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ ならば，$f\colon M \to \mathbb{R}^n$ はベクトル値関数とみなせるが，そのヤコビ行列は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right) = (f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$$

となる．

系 3.4. 写像 $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ がはめ込みである必要十分条件は，各点 P において，$m = \dim M$ 個のベクトル $f_{x_1}, \dots, f_{x_m}$ が線形独立となることである．ただし $(x_1, \dots, x_m)$ は P の回りの局所座標系である．

注意 3.5. はめ込みの定義は局所座標を用いていないので，系 3.4 の条件は座標系 $(x_1, \dots, x_m)$ のとり方によらないことがわかる．

■ 部分多様体と超曲面　まず，可微分多様体としてのユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分多様体と超曲面の定義を与える．擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ は可微分多様体としては $\mathbb{R}^n$ と同じものなので，この段階では区別しないこととする．

部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の**部分多様体**[3] であるとは，M に可微分多様体の構造で包含写像 $\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$ がはめ込みになっているものが存在することである．とくに M が $n-1$ 次元のとき，M を $\mathbb{R}^n$ の**超曲面**という．接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ は自然に $\mathbb{R}^n (= T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n)$ の線形部分空間と見なすことができる．

補題 3.6. 部分多様体 $M \subset \mathbb{R}^n$ の包含写像 $\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$ の微分は

$$d\iota_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M)$$

を満たす．

証明. 任意の $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して，M 上の曲線 $\gamma(t)$ で，$\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\dot\gamma(0) = \boldsymbol{v}$ を満たすものを一つとる．ただし $\dot{} = d/dt$ である．このとき，$\iota \circ \gamma(t) = \gamma(t)$ （ただし $\mathbb{R}^n$ の曲線と見なす）なので，補題 3.2 から

$$d\iota_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \iota \circ \gamma(t) = \dot\gamma(0) = \boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$$

を得る． □

方程式 “$F = 0$” で与えられた $\mathbb{R}^n$ の部分集合が部分多様体であることを判別するためには**陰関数定理**が便利である．

命題 3.7. $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級写像 $F\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^p$ に対して

$$M := F^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}^n \mid F(\mathrm{P}) = \mathbf{0}\}$$

が空集合でないとする．M の各点 P でヤコビ行列 $dF(\mathrm{P})$ の階数が p ならば，M には $\mathbb{R}^n$ の $(n-p)$-次元部分多様体となるような可微分多様体の構造が与えられる．

ここでは特に $p = 1$ の場合を考える．

命題 3.8. $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が $M := F^{-1}(\{0\})$ の点 P で

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathrm{P}) \neq 0$$

[3] 部分多様体：a submanifold; 超曲面：a hypersurface.

を満たしているならば，$\mathbb{R}^n$ における点 $\mathrm{P} = (p_1, \dots, p_n)$ の近傍 V と $(x_2, \dots, x_n)$ 空間の $\mathrm{P}' = (p_2, \dots, p_n)$ の近傍 V'，さらに C^∞-級関数 $f\colon V' \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$M \cap V = \{(f(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \mid (x_2, \dots, x_n) \in V'\}$$

を満たす．すなわち，点 P の近傍で M は $x_1 = f(x_2, \dots, x_n)$ とグラフ表示される．

命題 3.8 の状況で $(x_2, \dots, x_n)$ を M の点 P の近傍における局所座標と考えることができるので，

系 3.9. $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に対して $M := F^{-1}(\{0\})$ が空集合でないとする．このとき，M の各点 P で

$$(dF)_{\mathrm{P}} = (F_{x_1}(\mathrm{P}), \dots, F_{x_n}(\mathrm{P})) \neq \mathbf{0}$$

が成り立つならば，M は $\mathbb{R}^n$ の超曲面である．

例 3.10. $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$$

は平面を表す．ただし a, b, c, d は $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ となる定数である．◇

例 3.11. 変数 (x, y, z) の 2 次式 $F(x, y, z)$ の零点集合 $F^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ は，$\mathbb{R}^3$ の部分多様体与えるとき，2 次曲面[4] という．楕円面，一葉双曲面，二葉双曲面，楕円放物面，双曲放物面は 2 次曲面である[5] ◇

■ 接空間と誘導計量 以下，擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の超曲面の幾何学を考察する．とくに興味がるのは $s = 0$ (ユークリッド空間)，$s = 1$ (ローレンツ・ミンコフスキー空間）の場合である．

擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の超曲面 M の点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ は $\mathbb{R}^{n+1}_t (= T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^{n+1}_t)$ の n 次元線形部分空間である．$\mathbb{R}^{n+1}_t$ の擬ユークリッド内

[4] 2 次曲面：a quadric.
[5] これらの曲面の表示は，たとえば「曲線と曲面」（梅原・山田，裳華房）の第 6 節を見よ．

積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $T_{\mathrm{P}}M$ に制限して得られる $T_{\mathrm{P}}M$ の双線形対称形式を g_{P} と書く．各点 P に対して g_{P} を与える対応 g を $M \subset \mathbb{R}^{n+1}_t$ の**誘導計量**または**第一基本形式**という [6]．

定義 3.12. 超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}_t$ 上の点 P が超曲面の**非退化点**であるとは，g_{P} が非退化双線形型式ととなることである．g_{P} が退化双線形型式となるとき，P は**退化点**であるという [7]．

とくにローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の超曲面上の点 P において g_{P} が $T_{\mathrm{P}}M$ の正定値双線形型式を与えているとき，P は**空間的**，不定値双線形型式を与えているとき P は**時間的**であるという [8]．

定義 3.13. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の連結な超曲面 M が

- **空間的**であるとは，M 上のすべての点が空間的であること，
- **時間的**であるとは，M 上のすべての点が時間的であること，
- **非退化**であるとは，空間的または時間的であること

と定める．

■ 法線ベクトル

定義 3.14. 可微分関数 $F\colon \mathbb{R}^{n+1}_t \to \mathbb{R}$ と点 P に対して

$$\operatorname{grad} F(\mathrm{P}) := J_{t,n+1-t}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_0}(\mathrm{P}) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathrm{P}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\mathrm{P}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_t & O \\ O & I_{n+1-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_0}(\mathrm{P}) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathrm{P}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\mathrm{P}) \end{pmatrix}$$

を F の点 P の**勾配ベクトル** [9] という．ただし $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の座標を $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ と書いた．

[6] 誘導計量：the induced metric; 第一基本型式：the first fundamental form.
[7] 非退化点：a non-degenrate point; 退化点：a degenerate point.
[8] 空間的：space-like; 時間的：time-like. 用語がわかりにくいが，時間的点における接ベクトルがすべて時間的となるわけではない．外の空間の内積の符号が $(n,1)$ なので，時間的点における誘導計量 g_{P} の符号は自動的に $(n-1,1)$，すなわち $T_{\mathrm{P}}M$ にミンコフスキー内積を与える．
[9] 勾配ベクトル：the gradient vector.

ユークリッド空間，すなわち $t=0$ のときは，$\operatorname{grad} F$ は微分 dF を列ベクトルとみなしたものにほかならない．勾配ベクトルが $\mathbf{0}$ でないことと微分 dF が零でないことは同値だから，系 3.9 は次のように書き換えられる：

系 3.15. $\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に対して $M := F^{-1}(\{0\})$ が空集合でないとする．このとき，M の各点 P で $\operatorname{grad} F(\mathrm{P}) \neq \mathbf{0}$ ならば，M は $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の超曲面である．

命題 3.16. 関数 $F\colon \mathbb{R}^{n+1}_t \to \mathbb{R}$ が系 3.15 の仮定を満たしているとき，超曲面 $M = F^{-1}(\{0\})$ の点 P における接空間は次で与えられる：

$$T_{\mathrm{P}}M = \bigl(\operatorname{grad} F(\mathrm{P})\bigr)^{\perp}.$$

証明． ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ をとると，M 上の曲線

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \longmapsto \gamma(t) \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}_t \qquad (\varepsilon > 0)$$

で $\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\dot\gamma(0) = \boldsymbol{v}$ $(\dot{} = d/dt)$ となるものが存在する．ここで t の関数 $\varphi(t) := F(\gamma(t))$ を考えると，各 t に対して $\gamma(t) \in M$ だから $\varphi(t) = 0$．また，

$$\gamma(t) = {}^t\bigl(x_0(t), \dots, x_n(t)\bigr) \quad \text{と書くと} \quad \dot\gamma(t) = {}^t\bigl(\dot x_0(t), \dots, \dot x_n(t)\bigr)$$

なので，

$$\begin{aligned} 0 = \dot\varphi(0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F\bigl(\gamma(t)\bigr) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}\bigl(\gamma(0)\bigr)\ \frac{dx_j}{dt}\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathrm{P})\ \frac{dx_j}{dt}\Big|_{t=0} = \langle \operatorname{grad} F(\mathrm{P}), \dot\gamma(0)\rangle = \langle \operatorname{grad} F(\mathrm{P}), \boldsymbol{v}\rangle . \end{aligned}$$

したがって $\boldsymbol{v} \in \bigl(\operatorname{grad} F(\mathrm{P})\bigr)^{\perp}$ なので $T_{\mathrm{P}}M \subset \bigl(\operatorname{grad} F(\mathrm{P})\bigr)^{\perp}$ であることがわかった．さらに $T_{\mathrm{P}}M$ は n 次元多様体 M の接空間だから n 次元ベクトル空間．一方，命題 2.10 の (1)[10] から $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ の直交補空間も n 次元なので，結論が得られた． □

とくに，命題 2.10 から次のことが分かる：

命題 3.17. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 上の関数 $F\colon \mathbb{R}^{n+1}_1 \to \mathbb{R}$ が系 3.15 の仮定をみたしてるとき，点 $\mathrm{P} \in M = F^{-1}(\{0\})$ が

[10] 命題 2.10 では $\mathbb{R}^{n+1}_1$ をの場合を考えているが，(1) の結論は任意符号の擬ユークリッド空間に対して成立する．

- 超曲面 M の空間的な点であるための必要十分条件は $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ が時間的であること，
- 超曲面 M の時間的な点であるための必要十分条件は $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ が空間的であること，
- 超曲面 M の退化点であるための必要十分条件は $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ が光的であること

である．

定義 3.18. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化な超曲面 M 上の点 P における $\mathbb{R}^{n+1}_t = T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^{n+1}_t$ のベクトル $\nu(\mathrm{P})$ で，$T_{\mathrm{P}}M$ に直交し，$|\langle \nu(\mathrm{P}), \nu(\mathrm{P})\rangle| = 1$ となるものを M の P における**単位法線ベクトル**，対応 $\mathrm{P} \mapsto \nu(\mathrm{P})$ を**単位法線ベクトル場**という [11]．

命題 3.16 より次がわかる：

命題 3.19. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の非退化な超曲面 M 上の点 P における単位法線ベクトルは

$$\nu(\mathrm{P}) = \pm \frac{\operatorname{grad} F(\mathrm{P})}{|\langle \operatorname{grad} F(\mathrm{P}), \operatorname{grad} F(\mathrm{P})\rangle|^{1/2}}$$

で与えられる．

■ 第二基本型式 擬ユークリッド空間（ここでは，特にユークリッド空間やローレンツ・ミンコフスキー空間を考えている）$\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化な超曲面 M の単位法線ベクトル場 ν を一つとっておく [12]．

単位法線ベクトル場 ν は M から $\mathbb{R}^{n+1}_t$ への写像とみなせるので，微分写像

$$d\nu_{\mathrm{P}} \colon T_{\mathrm{P}}M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}_t \bigl(= T_{\nu(\mathrm{P})}\mathbb{R}^{n+1}_t\bigr)$$

を考えることができる．

補題 3.20. 任意の $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して $d\nu(\boldsymbol{v}) \in T_{\mathrm{P}}M$ である．

[11] 単位法線ベクトル：the unit normal (vector); 単位法線ベクトル場：the unit normal vector field.

[12] 各点での単位法線ベクトルのとり方はふたとおりあるが，ここではどちらかを指定せず，以下の議論は「単位法線ベクトルのとり方に依存する」と考える．

証明. $\langle \nu, \nu\rangle = \pm 1$ なので，$d\langle \nu, \nu\rangle = 0$．したがって P において

$$0 = d_X \langle \nu, \nu\rangle = 2\langle d\nu(X), \nu\rangle .$$

ここで $T_{\mathrm{P}}M = \nu(\mathrm{P})^{\perp}$ なので結論が得られた． □

定義 3.21. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化超曲面 M の単位法線ベクトル場を ν とする．このとき，補題 3.20 により

$$W_{\mathrm{P}} \colon T_{\mathrm{P}}M \ni \boldsymbol{v} \longrightarrow -d\nu(\boldsymbol{v}) \in T_{\mathrm{P}}M$$

が定まる．これを点 P における**型作用素**，**ワインガルテン作用素**という [13]．さらに $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して

$$I\!I_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \varepsilon \langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle \qquad \varepsilon = \langle \nu, \nu\rangle \in \{1, -1\}$$

で定まる $T_{\mathrm{P}}M$ 上の双線形型式を**第二基本型式**という [14][15]

命題 3.22. 定義 3.21 の第二基本型式は対称双線形型式を与える．

証明は演習問題（問題 III-3）とする．

ここで，少しだけ線形代数の復習：n 次元ベクトル空間 V の線形変換

$$W \colon V \longrightarrow V$$

の，V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ の**表現行列**とは

$$W(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{k=1}^{n} w_j^k \boldsymbol{v}_k \qquad (j = 1, \dots, n)$$

を満たす行列 $\hat{W} := (w_j^k)$ のことである [16]．この式をまとめて書けば

$$W([\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]) = \bigl(V(\boldsymbol{v}_1), \dots, W\boldsymbol{v}_n\bigr) = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]\hat{W}. \tag{3.1}$$

[13] 習慣にしたがってワインガルテン作用素は $d\nu$ に「マイナス」をつけたものとしている．文脈によっては $d\nu$ そのものをワインガルテン作用素ということもある．

[14] ワインガルテン作用素の符号，および，第二基本型式の定義式に出て来る符号は，次回紹介する「ガウスの公式」の法線成分の形を符号によらず $h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\nu$ とするためにこのようにとっている．

[15] 型作用素：the shape operator; ワインガルテン作用素：the Weingarten operator; 第二基本型式：the second fundamental form.

[16] 線形変換の表現行列の定義は双線形型式の表現行列の定義とは異なる．

とくに，基底変換 $[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]=[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]P$ （P は n 次の正則行列）により，表現行列は $\hat{W}\mapsto P^{-1}\hat{W}P$ と変換されるので，

補題 3.23. 線形変換 $W\colon V\to V$ の，V の基底に関する表現行列 $\hat{W}$ の固有多項式は V の基底のとり方によらない．特に，$\hat{W}$ の固有値は，その重複度も含めて基底のとり方によらない．

線形変換の表現行列の固有値のことを,「線形変換の固有値」ということにしよう．さらに，これら固有値の総和は，表現行列の対角成分の和に一致する．これを W のトレースといい，$\operatorname{tr} W$ という [17]．

超曲面の議論に戻る：

定義 3.24. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化超曲面のワインガルテン行列 W_{P} の固有値を超曲面 M の点 P における**主曲率**という．また，

$$H(\mathrm{P}):=\frac{1}{n}\operatorname{tr} W_{\mathrm{P}}$$

を M の P における**平均曲率** という [18]．さらに $H\colon \mathrm{P}\mapsto H(\mathrm{P})$ は M 上の関数を与えるが，これを超曲面の平均曲率関数，または単に平均曲率という．

注意 3.25. 3 次元ユークリッド空間の曲面論では，$\det W$ を**ガウス曲率**とよび，それが第一基本量から定まる（内的な量である）ことを学んだ（ガウスの驚異の定理）．一般の次元では（ユークリッド空間の超曲面であっても）$\det W$ は第一基本量のみでは一般に表すことができない．この講義では，次回以降で，超曲面の内的な不変量である「断面曲率」を考察したい．なお，$\det W$ はガウス・クロネッカー曲率とよばれ，それ自体は曲面の重要な不変量である．

■ 例：2 次超曲面 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上で

$$q_c(\boldsymbol{x}):=\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle - c \tag{3.2}$$

[17] W のトレース：the trace of W

[18] 主曲率：the principal curvatures; 平均曲率：the mean curvature.

により，関数 $q_c\colon \mathbb{R}^{n+1}_t\to\mathbb{R}$ を定義する．ここで c は実数の定数で，$\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上の点 P を，P の位置ベクトル $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とみなしている．この関数によって

$$Q_c:=q_c^{-1}(\{0\})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_t \mid \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = c\} \tag{3.3}$$

と定める．

<u>$t=0$ の場合</u>，すなわちユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の超曲面の場合は，

- $c>0$ のとき，Q_c は原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の**超球面**，とくに $n=2$ の場合は**球面**を表す [19]
- $c=0$ のとき Q_0 は原点 1 点からなる集合である．
- $c<0$ のとき $Q_c=\emptyset$.

<u>$t=1$ の場合</u>，すなわち，ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の超曲面の場合を考えよう．このときは，任意の実数に対して $Q_c\neq\emptyset$ である．ここで

$$\operatorname{grad} q_c(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x} \tag{3.4}$$

となるので，これが消えるのは $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となるとき．

- $c\neq 0$ のときは $\boldsymbol{0}\notin Q_c$ なので Q_c は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の部分多様体.
- $c=0$ のときは $\boldsymbol{0}$ で $\operatorname{grad} q_c(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ となってしまうので，原点の近傍では Q_c は部分多様体になっていない．原点以外の $\mathrm{P}\in Q_c$ に対して P の近傍 $U\subset\mathbb{R}^{n+1}_1$ で $Q_c\cap U$ が $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の部分多様体となるものが存在する．

これらの超曲面の因果特性，平均曲率を問題 III-1 で求めてみよう．

[19] 超球面：the hypersphere；球面：the sphere.

問　題　III

III-1 ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ において式 (3.3) で定義される Q_c を考える．

(1) Q_c が退化超曲面となるような c の値を求めなさい．

(2) Q_c が非退化超曲面であるとき，それが空間的（時間的）であるための c の条件を求めなさい．

(3) Q_c が非退化超曲面であるとき，ワインガルテン作用素 W は

$$W(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\sqrt{|c|}}\boldsymbol{v}$$

となることを示しなさい．

(4) Q_c が非退化超曲面であるとき，その平均曲率を求めなさい．

(5) $n = 2$ のとき Q_0, Q_1, Q_{-1} を図示しなさい．$\mathbb{R}^3_1$ の座標 (x_0, x_1, x_2) において x_0 座標を鉛直方向にとりなさい．

III-2 定義 2.11 の $\mathbb{R}^3_1$ のベクトル積の定義（訂正済み）を思い出そう：$\boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2)$, $\boldsymbol{w} = {}^t(w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^3_1$ に対して

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} := {}^t\left(-\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_0 & w_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}\right)$$

2 次元多様体 M の $\mathbb{R}^3_1$ へのはめ込み $f\colon M \to \mathbb{R}^3_1$ で $f\colon M \to f(M)$ が微分同相写像を与えているようなものをとる．すなわち $f(M)$ は $\mathbb{R}^3_1$ の曲面[20] である．M の局所座標系 (u, v) をとるとき，

(1) $f(M)$ が空間的（時間的）曲面となるための必要十分条件は，ベクトル $f_u \times f_v$ が時間的（空間的）であることが必要十分である．ただし “$\times$” は定義 2.11 で与えられたベクトル積である．このことを示しなさい．

(2) $f(M)$ の点 $f(\mathrm{P})$ における接空間 $T_{f(\mathrm{P})}f(M)$ は $\{f_u(\mathrm{P}), f_v(\mathrm{P})\}$ を基底にもつ．とくに曲面が非退化なとき，第二基本型式 $I\!I$ は

$$I\!I(f_u, f_u) = \frac{1}{\delta}\det(f_u, f_v, f_{uu}),$$
$$I\!I(f_u, f_v) = \frac{1}{\delta}\det(f_u, f_v, f_{uv}),$$
$$I\!I(f_v, f_v) = \frac{1}{\delta}\det(f_u, f_v, f_{vv})$$

を満たす．このことを示しなさい．ただし $\delta = \varepsilon|\langle f_u \times f_v, f_u \times f_v\rangle|^{1/2}$, $\varepsilon = \pm 1$ である．

[20] 2 次元の場合は超曲面ではなく「曲面」という．

(3) 以下，(x_0, x_1, x_2) の代わりに (t, x, y) と書く．2 変数関数 $\varphi(x, y)$ によって $t = \varphi(x, y)$ とグラフ表示される R^3_1 の曲面が非退化であるとき，その平均曲率を φ とその偏導関数を用いて表しなさい．

III-3 第二基本型式の対称性（命題 3.22）を証明しなさい．
ヒント：微分公式

$$\frac{d}{dt}\langle\gamma(t), \sigma(t)\rangle = \left\langle\frac{d\gamma}{dt}(t), \sigma(t)\right\rangle + \left\langle\gamma(t), \frac{d\sigma}{dt}(t)\right\rangle$$

を用いる．

IV. 驚異の定理

今回は対象を，とくに 3 次元（擬）ユークリッド空間の曲面 [1] に限る．

■ ユークリッド空間の曲面（復習）　まず，ユークリッド空間の曲面の理論の復習をしよう [2]．$\mathbb{R}^3$ $(=\mathbb{R}^3_0)$ の曲面を，はめ込み

$$f\colon U \ni (u,v) \longmapsto f(u,v) \in \mathbb{R}^3 \tag{4.1}$$

でパラメータ表示しておく．ここで U は $\mathbb{R}^2$ の領域である．とくに，系 3.4 により，f がはめ込みであるための必要十分条件は U 上の各点で $\{f_u, f_v\}$ が一次独立となることである [3]．このとき，ベクトル積 $f_u \times f_v$ は U 上至るところで $\mathbf{0}$ にはならない [4] ので，単位法線ベクトルは

$$\nu := \pm\frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$$

で与えられる．

いま，点 P の十分小さい近傍をとれば f は単射になるので，U とその像 $f(U)$ を同一視しておく [5]．部分多様体 $f(U)$ の接平面 [6] への，$\mathbb{R}^3$ の内積の制限を曲面 $f(U)$ の**第一基本形式**または**誘導計量**という（第 III 節）．[曲線と曲面] にしたがって，第一基本形式を

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{4.2}$$
$$E := \langle f_u, f_u\rangle, \quad F = \langle f_u, f_v\rangle, \quad G = \langle f_v, f_v\rangle$$

[*] 2017 年 5 月 2 日

[1] 前回までの定義からすると超曲面だが，とくに次元が 2 なので曲面 surface とよぶことにする．

[2] 詳細は，たとえば「曲線と曲面（改訂版）」（梅原雅顕・山田光太郎）（裳華房）を参照してほしい．以下，これを [曲線と曲面] のように引用する．

[3] 下付きの添字は偏微分を表す：$f_u = \partial f/\partial u$, $f_v = \partial f/\partial v$.

[4] ここでのベクトル積は，定義 2.11 で定義した 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間におけるベクトル積ではなく，線形代数や力学の時間に学んだ，ユークリッド空間のベクトル積である：

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} := {}^t\left(\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_0 & w_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}\right).$$

[5] 最初に与えられた領域 U 全体で f は単射ではないかもしれないが，今回は局所的な性質のみを考察したいので，このようにしても問題がない．

[6] 一般論としては「接空間」とよぶべきだが，ここでは 2 次元なのでとくに接平面 tangent plane とよぶ．

と表そう．ベクトル f_u, f_v を列ベクトルとみなせば

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix}$$

と書けることに注意しておく．

誘導計量が (4.2) という形に「表される」のは次のような理由による．曲面 U 上の点 P を一つ固定したとき，接空間 $T_{\mathrm{P}}U$ $(=T_{\mathrm{f(P)}}f(U))$ は $\{f_u, f_v\}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間である．ここで，記号 du, dv で線形写像

$$\begin{aligned} du\colon T_{\mathrm{P}}M \to \mathbb{R} \qquad & du(f_u) = 1, \quad du(f_v) = 0 \\ dv\colon T_{\mathrm{P}}M \to \mathbb{R} \qquad & dv(f_u) = 0, \quad dv(f_v) = 1 \end{aligned}$$

を表すと，$\{du, dv\}$ は $T_{\mathrm{P}}U$ 上の実数値線形形式全体がなす線形空間（すなわち $T_{\mathrm{P}}U$ の双対空間 dual space $T^*_{\mathrm{P}}U$）の基底となる．さらに

$$\begin{aligned} du^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &:= du(\boldsymbol{x})du(\boldsymbol{y}), \\ du\,dv(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &:= \frac{1}{2}\big(du(\boldsymbol{x})dv(\boldsymbol{y}) + du(\boldsymbol{y})dv(\boldsymbol{x})\big), \\ dv^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &:= dv(\boldsymbol{y})dv(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

と定めると，du^2, $du\,dv$, dv^2 はそれぞれ $T_{\mathrm{P}}U$ 上の対称双線形形式を与える．とくにこれらは $T_{\mathrm{P}}U$ 上の対称双線形形式全体のなす線形空間の基底となっている．点 P における誘導計量は，$T_{\mathrm{P}}U$ の対称双線形形式なので，du^2, $du\,dv$, dv^2 の線形結合で書けるはずで，実際 $\boldsymbol{x} = x_1 f_u + x_2 f_v$, $\boldsymbol{y} = y_1 f_u + y_2 f_v$ に対して

$$\begin{aligned} ds^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \langle x_1 f_u + x_2 f_v, y_1 f_u + y_2 f_v\rangle \\ &= x_1 y_1 \langle f_u, f_u\rangle + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\langle f_u, f_v\rangle + x_2 y_2 \langle f_v, f_v\rangle \\ &= E du(\boldsymbol{x})du(\boldsymbol{x}) + F\big(du(\boldsymbol{x})dv(\boldsymbol{y}) + du(\boldsymbol{y})dv(\boldsymbol{x})\big) + ddv(\boldsymbol{x})dv(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

となるので，(4.2) の表示が得られた．

この曲面のワインガルテン作用素 $W = -d\nu$（定義 3.21）は，f_u を $-\nu_u$, f_v を $-\nu_v$ に対応させる線形写像と見なすことができる．したがって，$T_{\mathrm{P}}U = T_{\mathrm{f(P)}}f(U)$ の基底 $\{f_u, f_v\}$ に関する表現行列を $\hat{W}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} \nu_u & \nu_v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix}\hat{W} \tag{4.3}$$

と表される．

第二基本形式 $I\!I$ を（定義 3.21）にしたがって $I\!I(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle$ で定義すると，

$$
\begin{aligned}
L &:= I\!I(f_u, f_u) = \langle f_u, W(f_u)\rangle = -\langle f_u, \nu_u\rangle = \langle f_{uu}, \nu\rangle\,,\\
M &:= I\!I(f_u, f_v) = \langle f_u, W(f_v)\rangle = -\langle f_u, \nu_v\rangle = \langle f_{uv}, \nu\rangle = I\!I(f_v, f_u),\\
N &:= I\!I(f_v, f_v) = \langle f_v, W(f_v)\rangle = -\langle f_v, \nu_v\rangle = \langle f_{vv}, \nu\rangle
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

を用いて

$$I\!I = L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と表すことができる．

定理 4.1. ワインガルテン作用素 W の基底 $\{f_u, f_v\}$ に関する表現行列は

$$\hat{W} := \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{I\!I}\,, \qquad \widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \widehat{I\!I} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

と表される．

証明. 行列 $\widehat{I}$ は第一基本形式（これは対称双線形形式であった）の基底 $\{f_u, f_v\}$ に関する表現行列だから，非退化性から $\widehat{I}$ は正則行列になる．式 (4.3) から

$$\widehat{I\!I} = -\begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_u & \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix}\hat{W} = \widehat{I}\,\hat{W}$$

より結論が得られた． □

定理 4.2 (ガウス・ワインガルテンの方程式)**.** これまでの状況で，

$$
\begin{aligned}
f_{uu} &= \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\nu \\
f_{uv} &= \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\nu \\
f_{vv} &= \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + N\nu
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\nu_u &= -W^1_1 f_u - W^2_1 f_v \\
\nu_v &= -W^1_2 f_u - W^2_2 f_v
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，Γ^i_{jk} と W^i_j は次を満たす (u,v) の関数である：

$$
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} W^1_1 & W^1_2 \\ W^2_1 & W^2_2 \end{pmatrix} = \hat{W} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.
$$

証明. 単位法線ベクトル ν の微分に関する式は (4.3) そのものである（ワインガルテンの公式 [7] とよばれる）．はめ込み f の 2 階微分の等式を示そう．定義域 U の各点で $\{f_u, f_v, \nu\}$ は一次独立だから，f_{uu}, f_{uv}, f_{vv} はこれらの線形結合で表される：

$$
\begin{aligned}
f_{uu} &= \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + A\nu \\
f_{uv} &= \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + B\nu \\
f_{vv} &= \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + C\nu.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

この係数を決定すればよい．いま (4.4)，f_u, f_v が ν と直交すること，および $\underline{\langle \nu, \nu\rangle = 1}$ から

$$A = L, \quad B = M, \quad C = N$$

を得る．また，(4.5) の両辺に f_u, f_v を内積すると，

$$
\begin{pmatrix} \langle f_u, f_{uu}\rangle & \langle f_u, f_{uv}\rangle & \langle f_u, f_{vv}\rangle \\ \langle f_v, f_{uu}\rangle & \langle f_v, f_{uv}\rangle & \langle f_v, f_{vv}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix}
$$

を得る．ここで

$$
\begin{aligned}
\langle f_u, f_{uu}\rangle &= \frac{1}{2}\langle f_u, f_u\rangle_u = \frac{1}{2}E_u \\
\langle f_u, f_{uv}\rangle &= \frac{1}{2}\langle f_u, f_u\rangle_v = \frac{1}{2}E_v \\
\langle f_u, f_{vv}\rangle &= \langle f_u, f_v\rangle_v - \langle f_{uv}, f_v\rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u \\
\langle f_v, f_{uu}\rangle &= \langle f_v, f_u\rangle_u - \langle f_{vu}, f_u\rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \\
\langle f_v, f_{uv}\rangle &= \frac{1}{2}\langle f_v, f_v\rangle_u = \frac{1}{2}G_u \\
\langle f_u, f_{vv}\rangle &= \langle f_v, f_v\rangle_v = \frac{1}{2}G_v
\end{aligned}
$$

なので，結論が得られた． □

[7] ワインガルテンの公式：Weingarten formula.

定理 4.2 にあらわれる Γ_{ij}^k $(i,j=1,2)$ を**クリストッフェル記号**または**接続係数**とよぶ [8].

■ 驚異の定理 3 次元ユークリッド空間の曲面のワインガルテン作用素の表現行列 $\hat{W}$（定理 4.1）の行列式はパラメータ (u,v) のとり方によらない.

定義 4.3. 3 次元ユークリッド空間の曲面に対して，そのワインガルテン行列の行列式

$$K_{\mathrm{ext}} := \det \hat{W}$$

を，**外的曲率・ガウス・クロネッカー曲率**という [9].

次はガウスの**驚異の定理**として知られている [10]：

定理 4.4. 3 次元ユークリッド空間の曲面のガウス・クロネッカー曲率は

$$\begin{aligned}(4.6)\quad K_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{EG-F^2}\times \\ \big(E(\Gamma^1_{22u}+\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{21}-\Gamma^1_{12v}-\Gamma^1 12\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}) \\ +F(\Gamma^2_{22u}+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{21}-\Gamma^2_{12v}-\Gamma^1 12\Gamma^2_{12}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{22})\big)\end{aligned}$$

を満たす．ただし，曲面の座標系 (u,v) に関する第一基本形式を (4.2)，クリストッフェル記号を定理 4.2 のように書いた.

とくに K_{ext} は第一基本形式の情報のみによって定まる.

証明. 定理 4.2 の第 3 式，第 2 式をそれぞれ u，u で微分し，f_{uu}, f_{uv}, f_{vv}, ν_u, ν_v をまた定理 4.2 で f_u, f_v, ν で表す．$\langle f_{vvu}, f_u\rangle = \langle f f_{uvv}, f_u\rangle$ なので，整理すると結論が得られる. □

式 (4.6) の左辺は曲面のワインガルテン作用素から定まる量だが，右辺は第一基本形式のみによって定まる.

[8] クリストッフェル記号：the Christoffel symbol; 接続係数：the coefficient of the connection. ただし $\Gamma^j_{21}=\Gamma^j_{12}$ としておく.

[9] 外的曲率：the extrinsic curvature; ガウス・クロネッカー曲率：the Gauss-Kronecker curvature. ユークリッド空間の曲面論で学ぶ**ガウス曲率**（たとえば [曲線と曲面] の第 8 節）のことであるが，このあとすぐ現れる「内的曲率」と区別するためにここでは別の名前で呼んでおく.

[10] 驚異の定理：Theorema Egregium

定義 4.5. 2 次元多様体上のリーマン計量 $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ に対して [11]，(4.6) の右辺で定まる量を，リーマン計量の**ガウス曲率**という [12].

定理 4.4 は，曲面のガウス・クロネッカー曲率 K_{ext} が，曲面をリーマン多様体とみなしたときのガウス曲率と一致することを示している．とくに，ガウス曲率 $K = K_{\mathrm{ext}}$ は，第一基本形式の係数 E, F, G を用いて

$$\begin{aligned}(4.7)\qquad K = &\frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + {G_u}^2)}{4(EG-F^2)^2} \\ &+\frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2} \\ &+\frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + {E_v}^2)}{4(EG-F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)}\end{aligned}$$

と表される（[曲線と曲面] 参照）.

■ ローレンツ・ミンコフスキー空間の空間的曲面の場合 ユークリッド空間の曲面をお手本にして，ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^3_1$ の曲面を考える．とくに曲面が非退化なら，第一基本形式，単位法線ベクトル，ワインガルテン作用素，第二基本形式がユークリッド空間の場合と同様に定義できる.

以下，$\mathbb{R}^3_1$ の**空間的**曲面を考える．すると，第一基本形式（誘導計量）

$$(4.8)\quad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$E := \langle f_u, f_u\rangle, \quad F = \langle f_u, f_v\rangle, \quad G = \langle f_v, f_v\rangle$$

は正定値なので，曲面上のリーマン計量を与えている．したがって R^3_1 の中にいることを忘れてリーマン計量のみから，ガウス曲率を定義 4.5 から求めることができる．このガウス曲率 K を定理 4.4 のような形でワインガルテン作用素を用いて計算したい.

曲面のパラメータ表示 $f\colon U \ni (u,v) \mapsto f(u,v) \in \mathbb{R}^3_1$ が空間的曲面を与え

[11] 多様体の各接空間上に内積が定義されているとき，その内積の族をリーマン計量 a Riemannian metric という．曲面の第一基本形式は曲面上の接平面の内積を与えているのでリーマン計量である．リーマン計量が与えられた多様体のことをリーマン多様体 a Riemannian manifold という.

[12] ガウス曲率：the Gaussian curvature.

ているとき，その法線ベクトル

$$f_u \times f_v$$

は時間的ベクトルである．ただし $\times$ はローレンツ・ミンコフスキー空間のベクトル積（定義 2.11）である．したがって，単位法線ベクトル

$$\nu := \frac{f_u \times f_v}{|\langle f_u \times f_v, f_u \times f_v \rangle|^{1/2}}$$

は時間的単位ベクトル，すなわち

$$\varepsilon := \langle \nu, \nu \rangle = -1$$

を満たしている．この単位法線ベクトル ν に対して，ワインガルテン作用素 $W := -d\nu$ を考えると，曲面上の各点 P で W_{P} は接平面の線形変換を与えている．さらに，

$$I\!I\boldsymbol{vv} := \varepsilon \langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w}) \rangle = -\langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w}) \rangle$$

により第二基本型式を定めると，これは接平面上の対称双線形型式を与えるので，

$$I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と表される．ただし

$$\begin{aligned}
L &:= I\!I(f_u, f_u) = -\langle f_u, W(f_u) \rangle = \langle f_u, \nu_u \rangle = -\langle f_{uu}, \nu \rangle, \\
M &:= I\!I(f_u, f_v) = -\langle f_u, W(f_v) \rangle = \langle f_u, \nu_v \rangle = -\langle f_{uv}, \nu \rangle = I\!I(f_v, f_u), \\
N &:= I\!I(f_v, f_v) = -\langle f_v, W(f_v) \rangle = \langle f_v, \nu_v \rangle = -\langle f_{vv}, \nu \rangle
\end{aligned}$$

である（ユークリッド空間の曲面の場合と符号が違う）．

定理 4.6. 以上の状況で

$$\begin{aligned}
f_{uu} &= \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\nu \\
f_{uv} &= \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\nu \\
f_{vv} &= \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + N\nu
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\nu_u &= -W^1_1 f_u - W^2_1 f_v \\
\nu_v &= -W^1_2 f_u - W^2_2 f_v
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，Γ^i_{jk} は第一基本型式 ds^2 のクリストッフェル記号（すなわち，定理 4.2 と同じもの）で W^i_j は

$$\begin{pmatrix} W^1_1 & W^1_2 \\ W^2_1 & W^2_2 \end{pmatrix} = \hat{W} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

で与えられる．

証明． 右側の式は，

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix}, \quad \widehat{I\!I} = -\begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \nu_u & \nu_v \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に注意すれば (4.3) と同様に示される．左側の式のうち f_u, f_v の成分は定理 4.1 と全く同様，ν 成分は $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ と第二基本型式の定義式の符号の違いに注意すれば定理 4.1 と同様である． □

定理 4.6 に対して驚異の定理 4.4 と同様の議論を行うと，次がわかる：

定理 4.7. 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の曲面のパラメータ表示 $f\colon U \ni (u,v) \mapsto f(u,v) \in \mathbb{R}^3_1$ が空間的曲面を与えているとき，第一基本型式から定まるガウス曲率は

$$K = -\det \hat{W}$$

を満たす．ここで $\hat{W}$ はワインガルテン作用素の表現行列である．

■ ローレンツ・ミンコフスキー空間の時間的曲面の場合 はめ込み $f(u,v)$ が $\mathbb{R}^3_1$ の時間的曲面を与えているときも，第一基本型式

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

が定義されるが，これは不定値計量である．しかし，非退化であることから，$EG - F^2 \neq 0$ が成り立っている．したがって定理 4.2 のようにクリストッフェル記号 Γ^j_{ij} が定義され，ガウス曲率 K が (4.6) の右辺によって定義される．

一方，単位法線ベクトル ν は空間的なので，

$$\varepsilon := \langle \nu, \nu \rangle = 1$$

となっている．そこで，ワインガルテン作用素 $W := -d\nu$ および第二基本型式

$$I\!I(*, ()) := \langle *, W(*) \rangle = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

を定めると，次が成り立つ：

定理 4.8. 以上の状況で

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\nu \\ f_{uv} &= \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\nu \\ f_{vv} &= \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + N\nu \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \nu_u &= -W^1_1 f_u - W^2_1 f_v \\ \nu_v &= -W^1_2 f_u - W^2_2 f_v \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，Γ^i_{jk} は第一基本型式 ds^2 のクリストッフェル記号（すなわち，定理 4.2 と同じもの）で W^i_j は

$$\begin{pmatrix} W^1_1 & W^1_2 \\ W^2_1 & W^2_2 \end{pmatrix} = \hat{W} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

で与えられる．

証明． 証明は定理 4.6 と全く同様．ただし $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ に注意する． □

したがって

定理 4.9. 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の時間的曲面のガウス曲率（第一基本型式に関するガウス曲率）K は

$$K = \det \hat{W}$$

を満たす．ここで $\hat{W}$ は曲面のワインガルテン作用素の表現行列である．

定理 4.7, 4.9 をまとめると，

系 4.10. 非退化なはめ込み

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$$

の単位法線ベクトルを ν，ワインガルテン作用素を $W := -d\nu$ とすると，第一基本型式に関するガウス曲率 K は

$$K = \langle \nu, \nu \rangle \det \hat{W}$$

を満たす．ただし $\hat{W}$ は W の接空間の基底に関する表現行列であ．る

問　題　IV

IV-1　3 次元ユークリッド空間の半径 r の球面のガウス曲率を求めなさい.

IV-2　次のパラメータ表示がユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面を与えるような (u,v) の範囲を求め，その範囲でガウス曲率を求めなさい.

$$f(u,v) = \bigl(\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v\bigr).$$

IV-3　2 次元多様体 M 上のリーマン計量 ds^2 が局所座標系 $(U;u,v)$ によって

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \qquad (\sigma = \sigma(u,v) \in C^\infty(U))$$

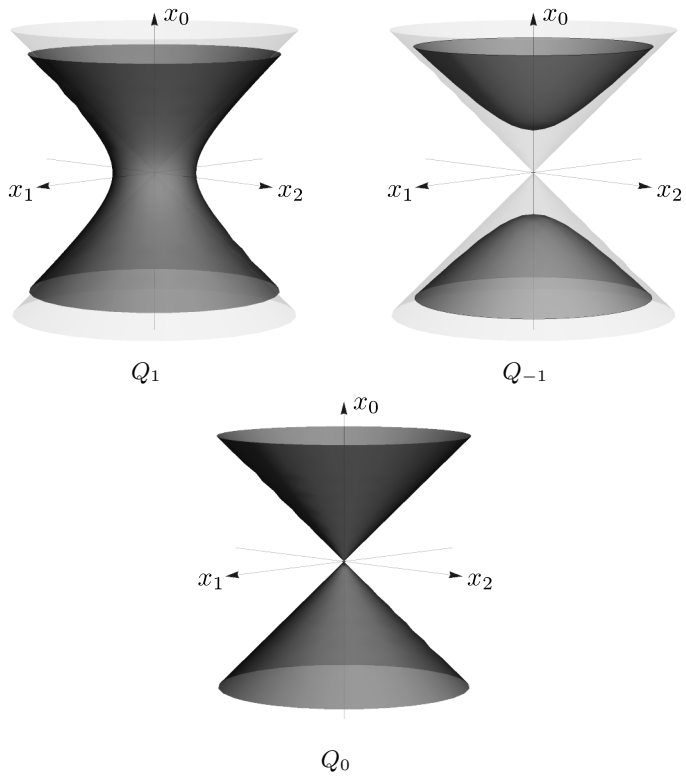
と表されているとき，(u,v) を**等温座標系**または**共形座標系** とよぶ [13]．この座標系に関してクリストッフェルの記号 Γ_{ij}^k，ガウス曲率 K はそれぞれ

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^1 = \sigma_u, \qquad \Gamma_{12}^1 = \sigma_v, \qquad \Gamma_{22}^1 = -\sigma_u,\\
&\Gamma_{11}^2 = -\sigma_v, \qquad \Gamma_{12}^2 = \sigma_u, \qquad \Gamma_{22}^2 = \sigma_v\\
&K = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv})
\end{aligned}$$

を満たすことを確かめなさい.

IV-4　3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の部分集合

$$Q_c := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - c = 0\}$$

のガウス曲率を求めなさい.

[13] 等温座標系：an isothermal coordinate system; 共形座標系：a conformal coordinate system. 一般に 2 次元リーマン多様体は，各点の近傍で等温座標系をもつ（[曲線と曲面] 第 15 節）.