2017 年 11 月 9 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 7

お知らせ

- 今回が最終回．**授業評価アンケート**を実施しますので，お手数ですがご回答ください．なお，集計結果は講義 web ページにて公開いたします．
- 定期試験は **11 月 16 日（木）10:45**，本館 **H103** で行います．通常の講義室と異なるので注意.
- 前回配布した「定期試験予告」は講義 web ページおよび OCW にて入手できます.

前回までの訂正

- 講義前半，問題 5-2 の解説で，射影された曲線 γ^* の曲率関数の係数に誤りがありました．正しくは $\kappa^* = 5/(1+5s^{*2})$，ただし s^* は γ^* の弧長パラメータ.
- 教科書では捩率の「捩」の字の右下が「犬」である，と述べましたが，改訂版では「捩」のようです．改訂前は正しい字だったのですが，裳華房の組版のシステムが変わったようです.
- 講義資料 6，1 ページ，下から 10 行目：感じ ⇒ 漢字
- 講義資料 6，1 ページ，下から 23 行目：方法 ⇒ 方法
- 講義資料 6，2 ページ，下から 17 行目：フレームがを ⇒ フレームを
- 講義資料 6，3 ページ，$(\gamma(s)\cdot \boldsymbol{e}(s)\boldsymbol{e}(s_0)$ ⇒ $(\gamma(s)\cdot \boldsymbol{e}(s))\boldsymbol{e}(s_0)$
- 講義資料 6，3 ページ，下から 23 行目：ですた ⇒ でした
- 講義資料 6，1 ページ，一番下の “me, too” は “Me, neither” ではない（否定文に対する同意に too は使えない）というご指摘がありましたが，山田は「特になし」は “I have nothing to ...” と見なしていましたので，これでよいのではないでしょうか．英語の得意な方，コメント求む．いずれにせよ，本来は “me” は主格でなくてはならないはずなのでむちゃくちゃな慣用句であるような気がします（英語って変ですね．“I, too” という用例もありますが．ドイツ語では Ich auch, スペイン語では Yo tambien だったと思います．いずれも一人称の主格).

授業に関する御意見

- 線形常微分方程式の基本定理は，非自明かつとても有用なすごい定理だと感じました．存在性の証明は難しいものも多いと思います．　**山田のコメント：** そうですか．前半と後半の関係がよくわかりませんが，線形常微分方程式の解の存在証明はそれほど難しくないと思います.
- 問題 5-1 の解説から，捩率が表わすことがよく分かりました．　**山田のコメント：** でしょ.
- 問題解説いつもありがとうございます．　**山田のコメント：** どういたしまして.
- 流石に問題解説に 1 時間は長すぎると思います．
  山田のコメント： 解説のふりをして重要な内容を伝えているはず．ちゃんと聞き取ってくださいよ.
- 試験告知の日に寝坊したので悲しい．　**山田のコメント：** そりゃ残念.
- 今回は締切が月曜日なので先生が大変ですね．　**山田のコメント：** はい.
- 今回の提出の締切が月曜で助かりました．　**山田のコメント：** そうですか.
- 日本語って難しいですね．　**山田のコメント：** どの言葉も難しいか．と
- Mathematica 使えるようになりたいです．　**山田のコメント：** 使うのは簡単．購入するにはちょっと高い.
- 試験はがんばります．　**山田のコメント：** ご自由に.
- 3Q 終了にあたり，優秀の微を飾ろうと思います．　**山田のコメント：** 期待してます.
- テストは教科書やプリントの問題が解ければ大丈夫なんでしょうか...　**山田のコメント：**「解ける」「大丈夫」の意味による.

質問と回答

質問： 講義で捩率を定義する前に $\kappa > 0$ を仮定しましたが，$\kappa = 0$ となる点で捩率を定義することは可能ですか．図形的な意味を考えると例えば常に $\kappa = 0$ である直線の接触平面からの離れ具合は，接触平面が定まらないから定まらないようにも思いますが，直線は直線を通る平面全てに接触していると考えれば 0 になるようにも思えます．

お答え： そうなりません．いま，κ, τ を区間 J 上で定義された（零点をもつかもしれない）関数とし，フルネ・セレの公式のような行列 Ω を考えると，$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$ を満たす $\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(3)$ が存在する．そこで $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ とおき，$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}(u)\,du$ とすれば空間曲線 γ が定まる．とくに $\gamma' = \boldsymbol{e}$ だから $\boldsymbol{e}$ は進行方向の単位接ベクトルで s は弧長．さらに $\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}$ なので，$|\boldsymbol{n}| = 1$ に注意すれば $|\boldsymbol{e}'| = |\kappa|$．すなわち γ の曲率は κ の絶対値で，$\kappa \neq 0$ となる点での主法線ベクトルは $\varepsilon\boldsymbol{n}$．ただし ε は κ の符号．したがって，従法線ベクトルは $\varepsilon\boldsymbol{b}$，捩率は $\varepsilon\tau$．$\kappa(s_0) = 0$ となる点で $\tau(s_0) \neq 0$ とすれば，（s_0 では捩率は定義されませんが）捩率の極限は 0 になりません．

質問： $\mathbb{R}^3$ で主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が定まらないのは，平面曲線では $\boldsymbol{e}$ と垂直なベクトルの集合は 1 次元で，かつ $\boldsymbol{e}' \perp \boldsymbol{e}$ であるので，$\boldsymbol{e}$ と垂直なベクトルを 1 つとれば（$\boldsymbol{n}$ として）必ず $\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}$ とかける．一方で，空間曲線では $\boldsymbol{e}$ と垂直なベクトルを 1 つとっても $\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}$ とは必ずしも書けないから，$\boldsymbol{n}$ は定められないという認識で大丈夫でしょうか． **お答え：**大体大丈夫．$\boldsymbol{n}$ が一つ定まらないから，ということです．

質問： 単位主法線ベクトルは加速度ベクトルの正規化したベクトルと考えられますか? 単位主法線ベクトルと単位従法線ベクトル，または主法線ベクトル，従法線ベクトルなどの表現があるが，どちらが正しい表現ですか．

お答え： 前半：弧長パラメータに関する加速度ベクトルを正規化したもの．パラメータが弧長でないと大きさで割っても単位主法線ベクトルにならない．後半：大きさ 1 ということを明らかにするために「単位」を付けるべき．ただし，文脈で明らかな場合には面倒くさいので省略することがある．

質問： $\mathbb{R}^3$ 内のおいても $\mathbb{R}^2$ 内で定義された正則ホモトピー同値のように閉曲線を連続的に変形させて一方を他方に滑らかに変形できることを同値関係として定義してもよいですか? また，その同値関係はなにか特殊な特徴を持ちますか． **お答え：**もちろん同値関係になりますが，その同値類は 1 点になってしまうはずです（空間閉曲線においては正則ホモトピー同値とホモトピー同値は同じ)．「自己交叉をもたない」変形によって単純閉曲線の同値関係を定義することができますが，この同値類を調べるのがいわゆる「結び目理論」です．

質問： 教科書の (5.6), (5.7) 式の証明を考えてみたのですが，$\boldsymbol{n} = \dfrac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \cdots = \dfrac{|\dot\gamma|^2\ddot\gamma - (\dot\gamma\cdot\ddot\gamma)\dot\gamma}{|\dot\gamma|^4}$ ($\because$ 略) までは計算でき，$(\dot\gamma \times \ddot\gamma) \times \dot\gamma = (\dot\gamma\cdot\dot\gamma)\ddot\gamma - (\ddot\gamma\cdot\dot\gamma)\dot\gamma = |\dot\gamma|^2\ddot\gamma - (\dot\gamma\cdot\ddot\gamma)\dot\gamma$ より (5.6) の $\boldsymbol{n}$ の式を示すには，$|(\dot\gamma \times \ddot\gamma) \times \dot\gamma| = |\dot\gamma|^4$ を示せばよいとわかったのですが，これが示せませんでした．この先どう進めればよいのですか? **お答え：**（以後の式変形は正しいのですが）最初の式が間違っています．$\kappa\boldsymbol{n} = d\boldsymbol{e}/ds$ です．すなわち左辺に κ が抜けています．$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}'/|\boldsymbol{e}'|$ を用いれば，ご質問の式から結論がすぐにわかります．

質問： 行列での線型常微分方程式で，単位行列以外を初期値とする場合は考えられるでしょうか．

お答え： $d\mathcal{F}/dt = \mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}(t_0) = I$ を満たす $\mathcal{F}$ をとり，$\tilde{\mathcal{F}} = A\mathcal{F}$ (A は定行列) とすると，$d\tilde{\mathcal{F}}/dt = \tilde{\mathcal{F}}\Omega$, $\tilde{\mathcal{F}}(t_0) = A$，すなわち，最初の微分方程式の t_0 における初期値が A となる解が得られた．実はこのような解は唯一．

質問： 大定理の証明のところで “$\det = \pm 1$ なので連続性より $\det\mathcal{F} = \det F_0 = 1$” とありますが，連続性から $\forall s \in I$ $\det\mathcal{F}(s) = \det F_0$ となることがわかりません．

お答え： 区間 I で定義された関数 $\mathcal{F}\colon I \to \mathrm{O}(3)$ を考える．(1) 直交行列の行列式は 1 または -1 である；(2) n 次正方行列の行列式は n^2 個の成分の多項式．したがって，n 次正方行列全体の集合を $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視すれば $\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ は連続関数．以上から，最初にとった $\mathcal{F}$ に対して $\det\mathcal{F}\colon I \to \{-1, 1\}$ は連続関数．$\{-1, 1\}$ は $\mathbb{R}$ の離散的な部分集合だから $\det\mathcal{F}$ は定数関数でなければらない．とくに $\det\mathcal{F}(s) = \det\mathcal{F}(s_0) = \det F_0$．

質問： 前回の質問で，空間でも $\gamma'(s) = {}^t(\sin\theta(s)\cos\phi(s), \sin\theta(s)\cos\phi(s), \cos\theta(s))$ とすると $\theta = \frac{\pi}{2}$ で ϕ が定まらないとあり，その通りだと思いました．しかし上式は，r を加えてパラメータを弧長パラメータでない t にすれば 3 次元の極座標表示のはずです．つまりそもそも 3 次元で極座標を考えること自体がナンセンスなのですか．

お答え： いいえ．確かに 3 次元極座標は「北極」と「南極」では座標を定めていません．しかし，それ以外の点では座標となっているので，定義域を適切に考えれば座標として使えます．一般に，考えている空間全体を座標系で覆わなくても，局所的な性質は考えることができます．多様体を学ぶときにもう一度．

質問： 平面曲線では 1 次，2 次の接触などは考えられますが，空間曲線も同様に考えられるのでしょうか? もし，別の考え方があれば教えて下さい．

質問： 平面曲線の時に曲率円を扱いましたが，空間曲線の場合でも曲率円（あるいは球）を定義しますか.

お答え： 上 2 つのご質問：ここでは定義しませんが，定義するとしたらどうすべきか考えてご覧なさい（たとえばブーケの公式をみる）.

質問： フレネ・セレの公式は高次元に拡張できますか.

質問： 空間曲線の基本定理（あるいは平面曲線の基本定理）もやはり n 次元ユークリッド空間に拡張できるでしょうか. その場合，κ や τ に類する関数を $n-1$ コ定義することになると思いますが.

お答え： 講義資料 6，2 ページ，下から 4 つ目の質問と回答.

質問： 教科書の問題の P27 の 3 番の解答において，教科書の答えでは内側の前輪の回転半径は $\Delta/\sin\theta - \varepsilon/2$ と書いてあるのですが，$\Delta/\sin\theta - \varepsilon/2\cos\theta$ ではないでしょうか.

お答え： 中心から前輪の車軸の中点までの距離は $\Delta/\sin\theta$．車軸の幅は $\varepsilon/2$．この差ではないでしょうか.

質問： 空間曲線になるだけでいろいろ面倒くせえなと思うこともあればそうでないと思うこともあります.

お答え： そうですか.

質問： 特になし． **お答え：**me, too.

7 曲面の表示

■曲面の表示

- なめらかな 2 変数関数のグラフ $z = f(x, y)$.
- 陰関数 $F(x, y, z) = 0$; 特異点：$\operatorname{grad} F = (F_x, F_y, F_z) = \mathbf{0}$ となる点.
- パラメータ表示 $p(u, v) = \bigl(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\bigr)$; 特異点：$p_u$ と p_v が 1 次従属となる点.
  曲面の正則なパラメータ表示（正則曲面）とは，各 (u, v) で $p_u(u, v)$, $p_v(u, v)$ が 1 次独立となること.

問 7.1. (1) なめらかな 3 変数関数 $F(x, y, z)$ に対して，$S := \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ を考える. $\mathrm{P} = (x_0, y_0, z_0) \in S$ において $F_z(\mathrm{P}) \neq 0$ ならば，P の近傍 $U \subset \mathbb{R}^3$ と (x_0, y_0) の近傍 $D \subset \mathbb{R}^2$ およびなめらかな 2 変数関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ が存在して $S \cap U = \{z = f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$ となることを示しなさい．このことを「S は P の近傍でなめらかな関数のグラフで表される」という.

(2) $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義されたなめらかな写像 $p\colon U \ni (u, v) \mapsto \bigl(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\bigr) \in \mathbb{R}^3$ を考える. 点 (u_0, v_0) で $p_u(u_0, v_0)$, $p_v(u_0, v_0)$ が一次独立であるとき，

- (u_0, v_0) において $\left(\det\begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right) \neq (0, 0, 0)$ であることを示しなさい.
- 上の問のベクトルの第 3 成分が 0 でないとき，(u_0, v_0) の近傍 $V \subset U$，$\mathbb{R}^2$ の開集合 D となめらかな関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ が存在して，[1] $p|_V$ は単射，[2] $p(V) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ となる.

■パラメータ変換

定義 7.2. $\mathbb{R}^2$ の領域 D から $\mathbb{R}^2$ の領域 U への写像

$$\varphi\colon D \ni (\xi, \eta) \longmapsto (u, v) = \bigl(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)\bigr) \in U \tag{7.1}$$

が**微分同相写像** diffeomorphism であるとは，[1] φ は全単射．[2] φ と φ^{-1} はともに C^∞-級となること.

問 7.3. (1) 式 (7.1) の φ が微分同相写像ならば，D の各点で次が成立することを示しなさい：

$$J := \det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \neq 0. \qquad (J \text{ を } \varphi \text{ のヤコビ行列式 (Jacobian) という．}) \tag{7.2}$$

2017 年 11 月 9 日

(2) 式 (7.1) の φ で，全射かつ D の各点で (7.2) を満たし，単射でないものの例を一つあげなさい．

(3) 式 (7.1) の φ で全単射，C^∞-級かつ φ^{-1} が C^∞-級でない例を一つあげなさい．

問 7.4. 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ と，(7.1) の形の微分同相写像 φ に対して $\tilde{p}(\xi,\eta) := p\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ とおくと， $\tilde{p}\colon D \to \mathbb{R}^3$ は正則な曲面のパラメータ表示を与えることを示しなさい．この $\tilde{p}$ を「p からパラメータ変換 φ で得られる」という．誤解の恐れがないときは，$\tilde{p}(\xi,\eta)$ を $p(\xi,\eta)$ と書くことがある．

■単位法線ベクトル　正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ ($U \subset \mathbb{R}^2$ は領域) に対して $\mathrm{P} := p(u_0, v_0)$ ($(u_0, v_0) \in U$) を一つ固定するとき，$p_u(u_0, v_0)$, $p_v(u_0, v_0)$ は 1 次独立なベクトルである．

- $p_u(u_0, v_0)$, $p_v(u_0, v_0)$ が生成する 2 次元空間は，曲面 S の P における接平面に平行である．
- 零でないベクトル $p_u(u_0, v_0) \times p_v(u_0, v_0)$ の向きは，S の P における接平面に垂直な方向を与える．

定義 7.5. 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，

- $(u, v) \in U$ における（または $\mathrm{P} = p(u, v)$ における）S の**単位法線ベクトル**とは，P における曲面の接平面に垂直な単位ベクトルのことである．
- なめらかな写像 $\nu\colon U \to \mathbb{R}^3$ が，パラメータ表示された曲面 p の**単位法線ベクトル場**であるとは，各 (u, v) で $\nu(u, v)$ が p の (u, v) における単位法線ベクトルを与えていることである．

問 7.6. (1) 曲面のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，$\nu(u, v) := \frac{p_u(u,v)\times p_v(u,v)}{|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|}$ は単位法線ベクトル場を与えていることを確かめなさい．

(2) $\tilde{p}$ を問 7.4 のように p からパラメータ変換で得られる曲面とするとき，次を示しなさい：

$$\frac{\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta}{|\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta|} = \varepsilon \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}\det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

ただし，この等式の右辺は $\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ における値を，左辺は (ξ,η) における値を表す．

(3) $\hat{p}(u, v) = Rp(u, v) + \boldsymbol{q}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$) とおくとき，次を示しなさい：

$$R\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \varepsilon\left(\frac{\hat{p}_u \times \hat{p}_v}{|\hat{p}_u \times \hat{p}_v|}\right) \qquad \varepsilon = \det R.$$

問題

7-1 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への滑らかな写像 $p(u, v) = (3u^4 + u^2 v, 4u^3 + 2uv, v)$ について，

i p_u と p_v が一次従属であるような $\mathbb{R}^2$ の点 (u, v) の集合を求めなさい．

ii $p(u_1, v_1) = p(u_2, v_2)$ ($(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$) となる $\mathbb{R}^2$ の点の組 $\bigl((u_1, v_1), (u_2, v_2)\bigr)$ をすべて求めなさい．

7-2 単位球面の次のふたつのパラメータ表示（定義域は適当に考えよ）の間の座標変換を与えなさい．

$$p(u, v) = \bigl(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u\bigr), \qquad \tilde{p}(\xi,\eta) = \left(\frac{2\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, \frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \frac{\xi^2+\eta^2-1}{1+\xi^2+\eta^2}\right)$$

7-3 陰関数 $F(x, y, z) = 0$ で表示された曲面上の点 (x_0, y_0, z_0) で $\operatorname{grad} F \neq \mathbf{0}$ が成り立つとき，その点における単位法線ベクトルは $\pm\,(\operatorname{grad} F)/|\operatorname{grad} F|\big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}$ であることを示しなさい．