数理経済学特講

複数財オークションのアルゴリズムと離散最適化

第11回 複数需要モデルと均衡

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

これまでの講義内容

- 供給は複数，需要は単一のオークションモデル
  - ワルラス均衡の定義
  - 均衡の存在性
    - 常に存在
  - 均衡の性質
    - 均衡配分＝最大重みマッチング
    - 均衡価格＝双対問題の最適解（の一部）
  - 均衡の計算
    - 評価値が所与：最大重みマッチングを利用
    - 評価値が不明，需要集合の要素が所与：
      均衡を近似に求めるアルゴリズム
    - 評価値が不明，需要集合全体が所与：
      均衡価格を厳密に求めるアルゴリズム

今後の講義内容

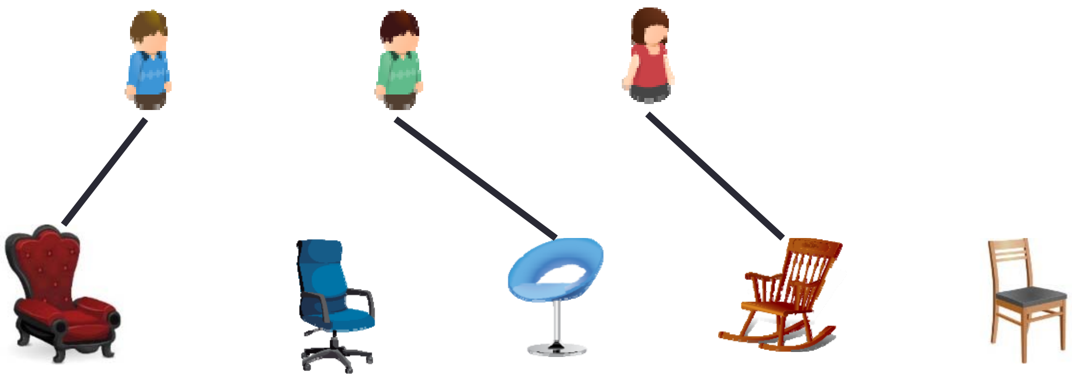
- 供給は複数，需要も複数のオークションモデル
  - ワルラス均衡の定義
  - 均衡の存在性
    - 存在するとは限らない
    - 評価値が粗代替性を満たす→存在
  - 均衡の性質
    - 均衡配分＝総評価値最大の財の配分
    - 均衡価格＝双対問題の最適解（の一部）
  - 粗代替性の性質：単改良性，M凹性
  - 均衡の計算
    - 評価値が所与：総評価値最大の財の配分を求めるアルゴリズム
    - 評価値が不明，需要集合の要素が所与：
      均衡を近似に求めるアルゴリズム
    - 評価値が不明，需要集合全体が所与：
      均衡価格を厳密に求めるアルゴリズム

複数財オークション：複数需要モデル

複数財を　同時に　オークション

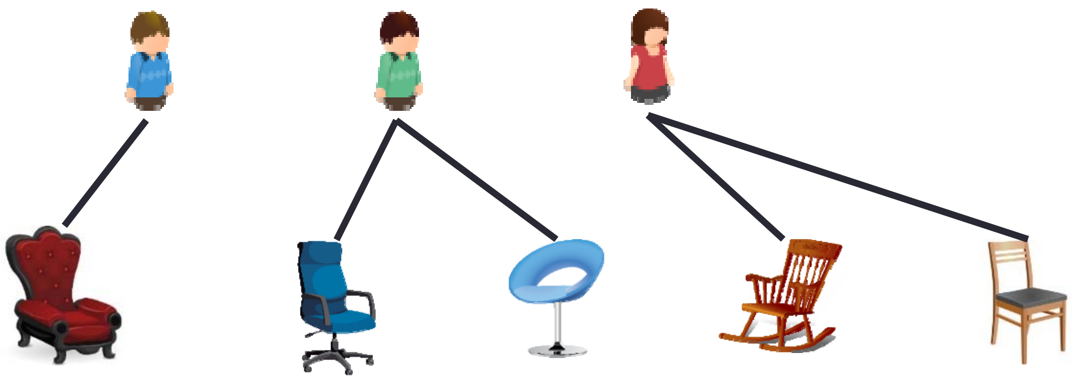
これまで授業で扱ったモデル：単一需要モデル

- 入札者は　高々1つの財　が欲しい（割当モデル）



これから扱うモデル：複数需要モデル

- 入札者は複数の財を得ることが可能



具体例の一部：

- 周波数の割当
- 空港の離発着権
- トラック配送の請負

財集合の評価関数

- 財の評価

単一需要モデル

- 入札者は各財を評価 → 財ごとに評価値 v(i,j)

複数需要モデル

入札者は財の集合を評価
→ 財の集合 X に対して評価値 $v_i(X)$
集合 X に関する関数（評価関数, valuation function）

一般的な仮定

- 空集合の評価値 $v_i(\emptyset)$ は 0
- v_i は単調非減少： $X \subseteq Y$ ならば $v_i(X) \leqq v_i(Y)$

評価関数の具体例

① ② ③ ④ ⑤

- ①を含む財集合は100，それ以外は0 (single-minded)
- 重み和（①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100）(additive)
- 財集合（①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100）の中の

  一番良い財にのみ依存 (unit-demand)

  {①, ②, ③}➔評価値70, {③, ④, ⑤}➔評価値100
- 財の数に依存 (symmetric)

  （1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280，5つ:300）

さまざまな評価関数の定義

- 一意専心(single-minded)評価関数:

特定の財集合 S とその価値 α を用いて,　$v_i(X) = \begin{cases} \alpha & (X \subseteq S) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

- 加法的(additive)評価関数: 各財 j の評価値 $v(i,j)$ を用いて

$$v_i(X) = \sum_{j \in X} v(i,j)$$

- 対称(symmetric)評価関数: 単調非減少関数 $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ を用いて,

$$v_i(X) = \varphi(|X|)$$

(φ が上に凸(concave)な場合➔対称凹(symmetric concave))

- 単一需要(unit-demand) 評価関数:

各財 j の評価値 $v(i,j)$ を用いて

$$v_i(X) = \max_{j \in X} v(i,j) \quad (\text{ただし } v_i(\emptyset) = 0)$$

単一需要モデル
に対応

割当評価関数

割当(assignment)評価関数: 最大重みマッチングで評価値が定まる

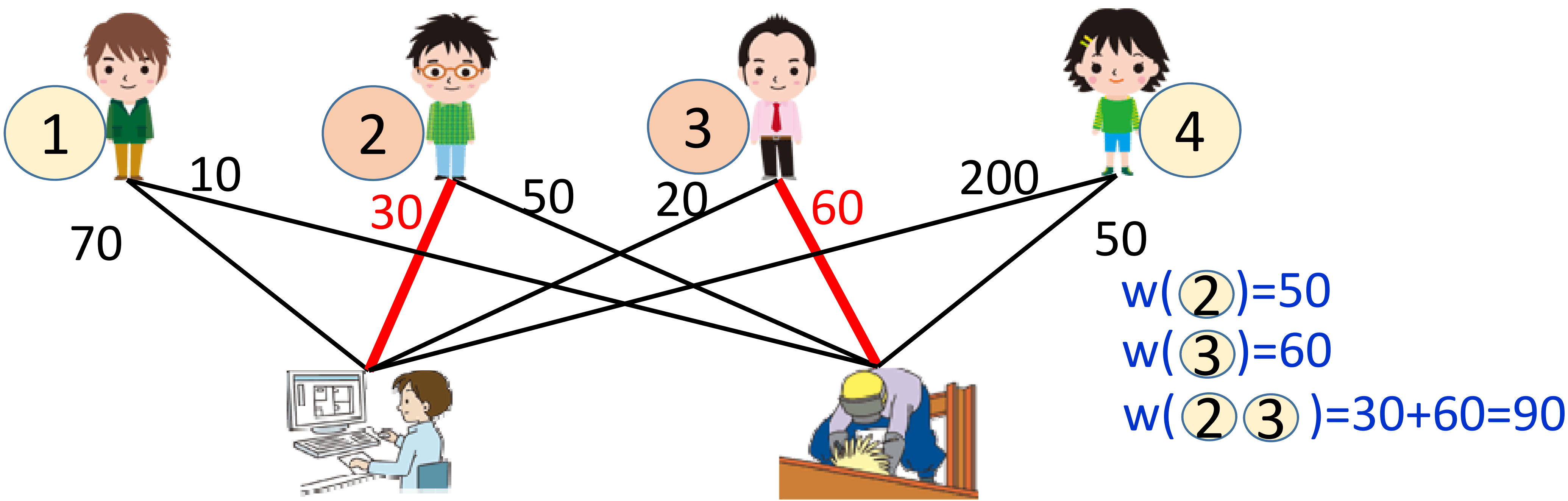
イメージ: ある工場の就職担当が,

k人の労働者(「財」)を雇って, k個の仕事に割り当てる

w_{jh} =労働者 j を仕事 h∈{1,2,…,k} に割り当てたときの利益

$v_i(X)$ =労働者 X を仕事{1,2,…,k} に割り当てたときの最大利益

$= \max\{\sum_{(j,h)\in M} w_{jh} \mid M$: マッチング, Xをカバー$\}$



需要集合

定義：需要集合$D_i(p) \subseteq 2^N$

$$D_i(p) = \arg\max\{v_i(X) - \textstyle\sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$$

価格pの下で
最も欲しい
財集合全体

例：$p = (60,60,60,60,60)$のとき

- Aさん：①を含む財集合は100，それ以外は0
  ➔ $D_A(p) = \{\ \{1\}\ \}$
  （欲しい財以外は，価格>0ならば選ばない）

- Bさん：重み和（①：50，②：70，③：40，④：30，⑤：100）
  ➔ $D_B(p) = \{\ \{2,5\}\ \}$
  （評価値>価格なら選ぶ，評価値<価格なら選ばない）

- Cさん：財の数依存（1つ：100，2つ：180，3つ：240，4つ：280，5つ：300）
  ➔ $D_C(p) = \{$財の数2または3$\}$

ワルラス均衡

- 財 N={1,2,…,n} を入札者 M = {1,2,…,m} に配分
  → $(X_0, X_1, \ldots, X_m)$ と表記
  - X_i = 入札者 i へ割り当てられた財集合
  - X_0 = 誰にも割り当てられなかった財集合
- 定義：価格ベクトルp^*と財の配分$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$の組はワルラス均衡
  ←→ $X_i \in D_i(p^*)$ $(i = 1, \ldots, m)$,　$p(j) = 0$ $(j \in X_0)$

価格p^*の下で皆が最良の財集合

例：$p = (60,60,60,60,60)$のとき

- Aさん：$D_A(p) = \{\ \{1\}\ \}$
- Bさん：$D_B(p) = \{\ \{2,5\}\ \}$
- Cさん：$D_C(p) = \{$財の数2または3$\}$

→ p と配分 $\{\emptyset, \{1\},\ \{2,5\},\ \{3,4\}\}$ はワルラス均衡

※各評価関数が単調非減少のとき，
　均衡において$X_0 = \emptyset$ と仮定できる
（∵ 価格0の財を追加配分しても，利得は減らない）

ワルラス均衡が存在しない例

X	$v_A(X)$	$v_B(X)$
∅	0	0
①	3	0
②	3	0
①, ②	4	5

- ワルラス均衡は存在するとは限らない

均衡が存在すると仮定:
- X_0=∅ なる均衡が存在
- A, B で財を分割する場合
  対称性より, A に財①, Bに財②を割り当て
- 財①を A に割当

→Aにとって {①}の利得≧{①, ②}の利得 → 財②の価格≦1
- 財②を B に割当

→ Bにとって財②の利得≧0 → 財②の価格=0 (矛盾)

∴ 可能な割当は, 入札者 A または B に全部
- B に全部 → {①, ②}の総価格≦5
- A に全部 → ①(②)の価格≧3
  → {①, ②}の総価格≧6 (矛盾)

単一需要と複数需要の場合の均衡の比較

- 単一需要モデルにおけるワルラス均衡

  ≒ 複数需要モデルで単一需要評価関数の場合のワルラス均衡

単一需要評価関数: 各財 j の評価値 $v(i,j)$ を用いて

$$v_i(X) = \max_{j \in X} v(i,j) \quad (\text{ただし } v_i(\emptyset) = 0)$$

より具体的には,

- 一方のワルラス均衡から, 他方のワルラス均衡を簡単に作れる
- 一方の均衡価格は, 他方でも均衡価格

∴ 単一需要モデルは, 複数需要モデルの特殊ケースと見なせる

単一需要の均衡から複数需要の均衡へ

財の配分$\alpha(i)$ $(i \in B)$と価格$p(j)$ $(j \in N)$ の組は

単一需要モデルの均衡

→ $\alpha(i) \neq 0$ のとき $X_i = \{\alpha(i)\}$, $\alpha(i) = 0$ のとき $X_i = \emptyset$

X_0=残りの財　　とおく

➔財の配分$(X_0, X_1, \dots, X_m)$と価格$p(j)$ $(j \in N)$ の組は

複数需要モデルの均衡

（証明）X_0 の各財はもともと誰にも割り当てられていない

➔単一需要モデルの均衡の条件より，価格＝0

以下，$v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p(j) \geq v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j)$ $(\forall Y \subseteq N)$ を示す．

単一需要の均衡から複数需要の均衡へ

以下，$v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p(j) \geq v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j)$ $(\forall Y \subseteq N)$ を示す.

- $\alpha(i) \neq 0$ のとき $X_i = \{\alpha(i)\}$

➔ $v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p(j) = v\big(i, \alpha(i)\big) - p\big(\alpha(j)\big)$

単一需要モデルの均衡条件より，$v\big(i, \alpha(i)\big) - p\big(\alpha(j)\big) \geq 0$,

$$v\big(i, \alpha(i)\big) - p\big(\alpha(j)\big) \geq v(i, h) - p(h) (\forall h \in N)$$

よって，Y が空のときは $v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j) \leq v\big(i, \alpha(i)\big) - p\big(\alpha(j)\big)$

Y が非空のときは，$k \in Y, v(i, k) = \max_{h \in Y} v(i, h)$ とすると,

価格の非負性より

$v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j) \leq v(i, k) - p(k) \leq v\big(i, \alpha(i)\big) - p\big(\alpha(j)\big)$

- $\alpha(i) = 0$ のときの証明は省略

複数需要の均衡から単一需要の均衡へ

- 複数需要モデルの場合の均衡から,
  単一需要モデルの均衡を作る方法

定義：財の配分$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$と価格ベクトル p の組は
（複数需要モデルにおける）ワルラス均衡
⇔ $X_i \in D_i(p^*)$ $(i = 1, \ldots, m)$, $p(j) = 0$ $(\forall j \in X_0)$
以下，簡単のために，各 X_i (i=1,2,…,m) は非空と仮定

示すこと: 各 X_i (i=1,2,…,m) の中に,
価格>0の財 j* は高々1つ, その財は X_i の中で評価値最大

➔ $v(i,j^*) - p(j^*) = v_i(X_i) - p(X_i) \geqq v_i(\{j\}) - p(\{j\}) = v(i,j) - p(j)$
$v(i,j^*) - p(j^*) = v_i(X_i) - p(X_i) \geqq v_i(\{\}) = 0$
∴ 配分を $\alpha(i) = X_i$ の中で評価値最大の財　とすると,
この配分と価格p(j) は単一需要モデルの均衡

単一需要関数の需要集合の性質

単一需要評価関数に対する需要集合

- $D_i(p) = \arg\max\{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$

  $= \arg\max\{\max_{j \in X} v(i,j) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$

∴ $X \in D_i(p)$ のとき

Xの中に価格 > 0 の財 j* は高々1つ

（∵2つ以上存在➔1つを除いて削除した方が利得大）

$v(i, j^*) = \max_{j \in X} v(i,j)$ を満たす

（∵ 評価値最大でない財の価格>0➔削除した方が利得大）

ワルラス均衡と総評価値最大化

単一需要モデルの場合: 均衡配分←→総評価値最大

命題:

(i) 財の配分$\alpha(i)$ $(i \in B)$と価格$p(j)$ $(j \in N)$ の組が均衡のとき
配分$\alpha(i)$ は最大重みマッチング

(ii) 任意の最大重みマッチングは均衡配分

複数需要モデルの場合: 均衡配分←→総評価値最大

命題:

(i) 財の配分$(X_0, X_1, \dots, X_m)$と価格$p(j)$ $(j \in N)$ の組が均衡のとき

$$\sum_{i=1}^{m} v_i(X_i) = \max\{\sum_{i=1}^{m} v_i(Y_i) \mid (Y_0, Y_1, \dots, Y_m)\text{は財の配分}\}$$

(ii) 上記式の右辺の最適解 $(Y_0^*, Y_1^*, \dots, Y_m^*)$ は均衡配分

均衡配分ならば総評価値最大

(i) の証明: 任意の配分$(Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)$に対し
$\sum_{i=1}^{m} v_i(X_i) \geq \sum_{i=1}^{m} v_i\,(Y_i)$ を証明すれば良い.
仮定より, 各iについて $v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p_j \geq v_i(Y_i) - \sum_{j \in Y_i} p_j$
片々足すと,

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{m} v_i(X_i) - \sum_{j \in N} p_j = \sum_{i=1}^{m} v_i(X_i) - \sum_{j \in N \setminus X_0} p_j$$
$$\geq \sum_{i=1}^{m} v_i\,(Y_i) - \sum_{j \in N \setminus Y_0} p_j \geq \sum_{i=1}^{m} v_i\,(Y_i) - \sum_{j \in N} p_j$$

(ii) の証明: $Y_i = Y_i^*$ のとき, $\sum_{i=1}^{m} v_i(X_i) = \sum_{i=1}^{m} v_i\,(Y_i)$
∴ 不等式(＊)の不等号は等号で成立
∴$v_i(Y_i^*) - \sum_{j \in Y_i} p_j = v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p_j$ よって $Y_i^* \in D_i(p)$
$p(j) = 0 \ \ (\forall j \in Y_0^*)$

ワルラス均衡が存在しない例（再掲）

X	$v_A(X)$	$v_B(X)$
$\emptyset$	0	0
①	3	0
②	3	0
①，②	4	5

- ワルラス均衡は存在するとは限らない

均衡が存在すると仮定
➔ 命題より，均衡配分では
　Bに財を全て割り当て，
　Aには財を割り当てないことになる
Bに財を全て割り当てたときの利得≧0
　➔ ①の価格＋②の価格≦5
Aに財を割り当てないときの利得＝0≧財①（②）の利得
　➔ 財①（②）の価格≧3　➔ ①の価格＋②の価格≧6（矛盾）

演習問題

問1：評価関数v_1, v_2, v_3, v_4が以下のように与えられたとき，
均衡が存在しないことを示せ．

$v_1(X)$ の値

{}	{1}	{2}	{3}	{12}	{23}	{13}	{123}
0	4	6	8	10	8	8	10

$$v_2(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset, \{3\}) \\ 3 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_3(X) = \begin{cases} 0.5 & (1 \in X) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_4(X) = \begin{cases} 0.5 & (2 \in X) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

問2：評価関数v_1, v_2, v_3が以下のように与えられたとき，
均衡を求めよ．

$v_1(X)$ の値：問1と同じ

$$v_2(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset) \\ 4 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_3(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset) \\ 5 & (|X| = 1) \\ 7 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$