

数理経済学特講

複数財に対するオークションの 数理とアルゴリズム

第8回 最大重みマッチングと 均衡割当の関係

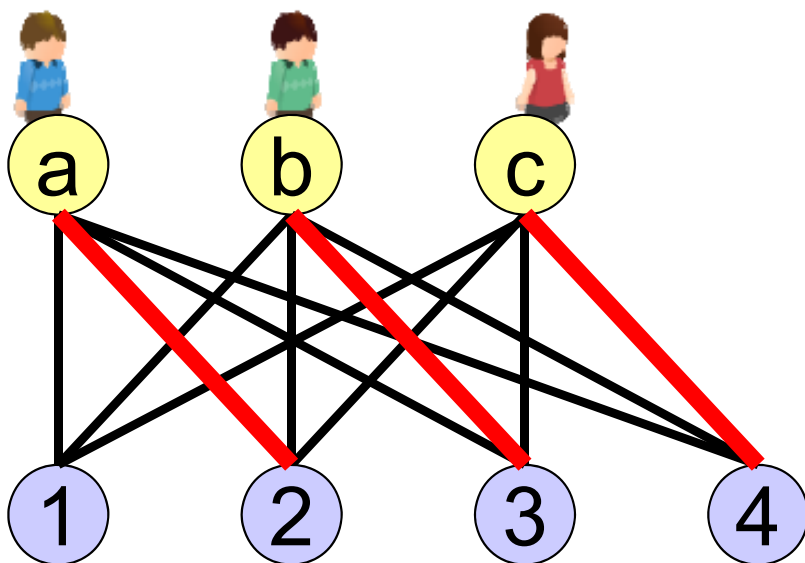
塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

最大重みマッチング問題

- 各入札者の各財への評価値 $v(i,j)$ が与えられている状況で
入札者に割り当てられた財の評価値の合計を最大化したい



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

- 最大重みマッチング問題:**
枝に重みを与えられたグラフにおいて,
枝重みの和が最大のマッチングを求める

双対問題の定式化

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$$

$$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$$

双対変数を用いた最適性条件

定理1: 二部グラフのマッチング M は最大重み
 $\leftrightarrow$ 次の条件を満たす

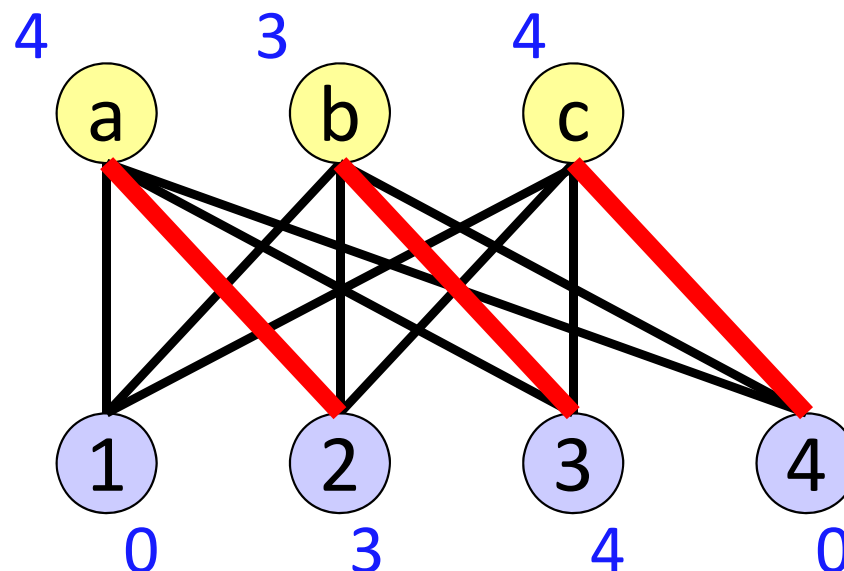
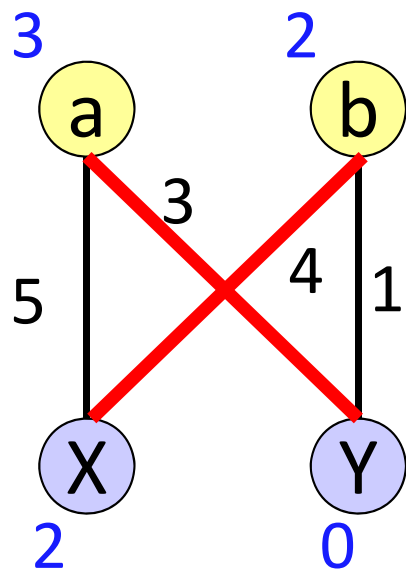
双対問題の許容解 $q(i)$ ($i \in B$), $p(j)$ ($j \in N$) が存在

マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i) + p(j) = v(i, j)$

$i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i) = 0$

$j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j) = 0$

**Mの最適性の
証拠**



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

双対問題の最適性条件

定理2: 双対問題の許容解 $q(i)$ ($i \in B$), $p(j)$ ($j \in N$) は最適解

$\leftrightarrow$ 次の条件を満たすマッチング M が存在

マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i) + p(j) = v(i, j)$

$i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i) = 0$

$j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j) = 0$

双対解の
最適性の
証拠

[$\leftarrow$ の証明]

必要性の証明(その1)

補題1: 二部グラフのマッチング M は最大重み

← 次の条件を満たす **非負**実数 $q(i)$ ($i \in B$), $p(j)$ ($j \in N$) が存在

- ① 任意の枝 (i,j) に対し, $q(i)+p(j) \geq v(i,j)$
- ② マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i)+p(j) = v(i,j)$
- ③ $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i)=0$
- ④ $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j)=0$

[補題1の証明]

「任意のマッチング T の重み $\geq \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j) = M$ の重み」
を示す

主双対問題の解の最適性条件

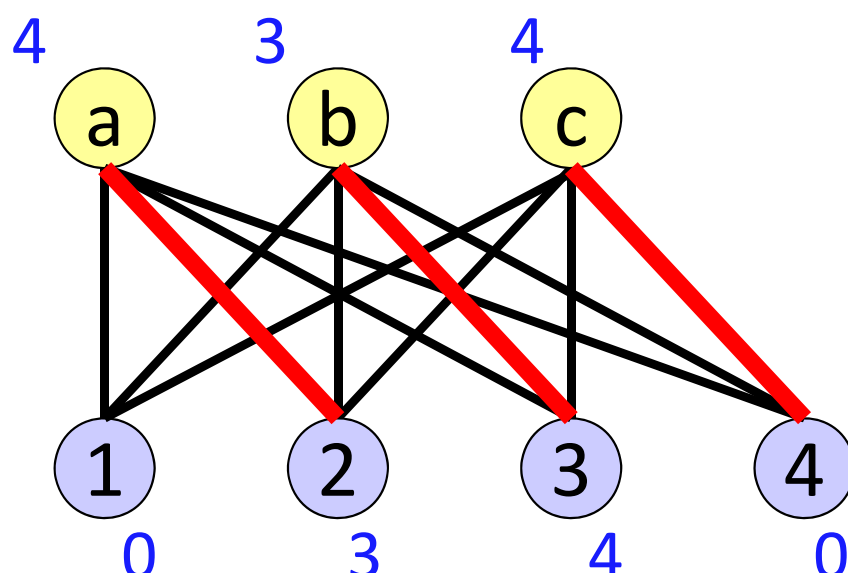
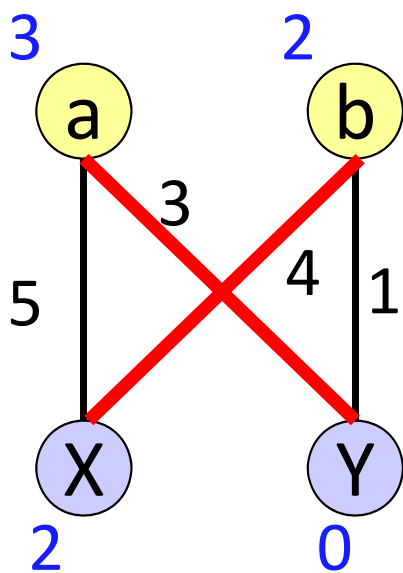
定理3: 二部グラフのマッチング M と

双対問題の許容解 $q(i)$ ($i \in B$), $p(j)$ ($j \in N$) はそれぞれ最適解

$\leftrightarrow$ マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i) + p(j) = v(i, j)$

$i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i) = 0$

$j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j) = 0$



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

必要性の証明(その1)

補題4: 二部グラフのマッチング M と
 双対問題の許容解 $q(i)$ ($i \in B$), $p(j)$ ($j \in N$) に対し,
 以下の条件が成立 $\rightarrow M$ は最大重み, q, p は双対問題の最適解
 マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i) + p(j) = v(i, j)$
 $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i) = 0$
 $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j) = 0$

証明: q, p は M の最適性の証拠

$\therefore$ 定理1より, M は最大重みマッチング

q, p の最適性を示すために,

双対問題の任意の許容解 $q'(i)$ ($i \in B$), $p'(j)$ ($j \in N$) に対し,

$$\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j) = M \text{ の重み } \leq \sum_{i \in B} q'(i) + \sum_{j \in N} p'(j)$$

を示す.

必要性の証明(その2)

[等号の証明] (前回の授業でやった)

B_M = マッチング M の枝が接続している B の頂点

N_M = マッチング M の枝が接続している N の頂点

→ 3つの条件より,

$$\begin{aligned} \text{マッチング } M \text{ の重み} &= \sum_{(i,j) \in M} v(i,j) \\ &= \sum_{i \in B_M} q(i) + \sum_{j \in N_M} p(j) = \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j) \end{aligned}$$

[不等号の証明]

→ $q'(i), p'(j)$ の許容性より,

$$\begin{aligned} \text{マッチング } M \text{ の重み} &= \sum_{(i,j) \in M} v(i,j) \leq \sum_{(i,j) \in M} (q'(i) + p'(j)) \\ &= \sum_{i \in B_M} q'(i) + \sum_{j \in N_M} p'(j) \leq \sum_{i \in B} q'(i) + \sum_{j \in N} p'(j) \end{aligned}$$

[←の証明終わり]

十分性の証明(その1)

補題5: 二部グラフの最大重みマッチング M と
双対問題の最適解 $q(i)$ ($i \in B$), $p(j)$ ($j \in N$) に対し,
以下の条件が成立

- ① マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i)+p(j) = v(i,j)$
- ② $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i)=0$
- ③ $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j)=0$

証明: M は最大重みマッチング

$\therefore$ 定理1より, M の最適性の証拠として,

以下の条件を満たす双対許容解 q', p' が存在

マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q'(i)+p'(j) = v(i,j)$

$i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q'(i)=0$

$j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p'(j)=0$

これらを使って, ①, ②, ③を証明する.

十分性の証明(その2)

補題4の証明と同様にして, 以下が示せる:

$$\sum_{i \in B} q'(i) + \sum_{j \in N} p'(j) = \text{マッチング } M \text{ の重み}$$

$$q(i) \geq 0 (i \in B \setminus B_M), p(j) \geq 0 (j \in N \setminus N_M)$$

また, $q(i), p(j)$ の許容性より,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j) &\geq \sum_{i \in B_M} q(i) + \sum_{j \in N_M} p(j) \\ &= \sum_{(i,j) \in M} (q(i) + p(j)) \geq \sum_{(i,j) \in M} v(i,j) = \text{マッチング } M \text{ の重み} \\ &= \sum_{i \in B} q'(i) + \sum_{j \in N} p'(j) \end{aligned}$$

$$q(i) + p(j) \geq v(i,j) ((i,j) \in M)$$

q, p は双対最適解なので,

上記の不等号2つは等号でなければならない

$$\begin{aligned} \therefore q(i) &= 0 (i \in B \setminus B_M), p(j) = 0 (j \in N \setminus N_M) \\ q(i) + p(j) &= v(i,j) ((i,j) \in M) \end{aligned}$$

均衡と最大マッチングの関係

均衡の条件とマッチング・双対許容解の最適性条件は
本質的に等価 $\rightarrow$ 次の必要十分条件

定理6: 財の配分 $\alpha(i)$ と価格 $p(j)$ は均衡
 $\leftrightarrow$ 配分 $\alpha(i)$ に対応するマッチング M は最大重み
かつ, ある $q(i)$ ($i \in B$) が存在して, q, p は双対問題の最適解

系:

財の配分 $\alpha(i)$ は均衡配分

$\leftrightarrow$ 配分 $\alpha(i)$ に対応するマッチング M は最大重み

財の価格 $p(j)$ は均衡価格

$\leftrightarrow$ ある $q(i)$ ($i \in B$) が存在して, q, p は双対問題の最適解

均衡の条件の書き換え(その1)

定義: 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ および財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は **ワルラス均衡(競争均衡)**

- $\leftrightarrow$
- 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j$)
 $\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
 - 入札者 i に財の割り当てがない ($\alpha(i) = 0$)
 $\rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$
 - 財 j が誰にも割り当てられない $\rightarrow p(j) = 0$

財の配分をマッチング M で表すと...

- ① $(i, j) \in M \rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
- ② $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない
 $\rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$
- ③ $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j) = 0$

均衡の条件の書き換え(その2)

$q(i)$ ($i \in B$) を $q(i) = \max \left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \right]$ により定義

$\rightarrow q(i) \geq 0$ ($\forall i \in B$), $q(i) \geq v(i, h) - p(h)$ ($\forall i \in B, \forall h \in N$)

$\therefore q(i)$ は双対許容解

条件①と $q(i)$ の定義より:

④ $(i, j) \in M \rightarrow q(i) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} = v(i, j) - p(j)$
 $\therefore q(i) + p(j) = v(i, j)$

条件②と $q(i)$ の定義より:

⑤ $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i) = 0$

③, ④, ⑤ より,

マッチング M と双対許容解 q, p は定理3の条件を満たす

$\therefore M$ は最大マッチング, q, p は双対最適解

最大重みマッチングの最適性条件の書き換え(その1)

定理3: 二部グラフのマッチング M と

双対問題の許容解 $q(i)$ ($i \in B$), $p(j)$ ($j \in N$) はそれぞれ最適解 $\iff$

- ① マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i) + p(j) = v(i, j)$
- ② $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i) = 0$
- ③ $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j) = 0$

• q, p は双対許容解 $\rightarrow$

- ④ $q(i) \geq 0$ ($i \in B$), $p(j) \geq 0$ ($j \in N$)
- ⑤ $q(i) + p(j) \geq v(i, j)$ ($i \in B, j \in N$)

変数 $q(i)$ を消去していく

最大重みマッチングの最適性条件の書き換え(その2)

- $(i,j) \in M \rightarrow$ ④, ① より $0 \leq q(i) = v(i,j) - p(j)$
 ①, ⑤ より $v(i,j) - p(j) = q(i) \geq v(i,h) - p(h) \ (\forall h \in N)$
 $\therefore 0 \leq v(i,j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}$ ⑥
 - $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない
 $\rightarrow$ ②, ⑤より $0 = q(i) \geq v(i,h) - p(h) \ (\forall h \in N)$
 $\therefore \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$ ⑦
- ⑥, ⑦, ③ より, マッチング M (に対応する財の配分) と $p(j)$ は
 均衡の条件を満たす

補足：双対問題の書き換え（その1）

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

変数 $q(i)$ を消去したい

- 各変数 $q(i)$ はなるべく小さくしたい
- $q(i) \geq v(i, j) - p(j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$
- $q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$\therefore q, p$ が最適解ならば $q(i) = \max \left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \right]$
が成立

補足：双対問題の書き換え（その2）

変数 $q(i)$ に代入：

$$\text{最小化 } \sum_{i \in B} \max \left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \right] + \sum_{j \in N} p(j)$$

$$\text{条件 } p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$$

命題：

財の価格 $p(j)$ は均衡価格 $\iff p(j)$ は上記の問題の最適解

関連する話題：割当ゲーム

ゲーム理論における
「協力ゲーム」の一種

- B : 雇用者(仕事)の集合
- N : 労働者の集合
- 労働者 j が仕事 i に従事 $\rightarrow$ 収益 $v(i,j)$ (≥ 0)

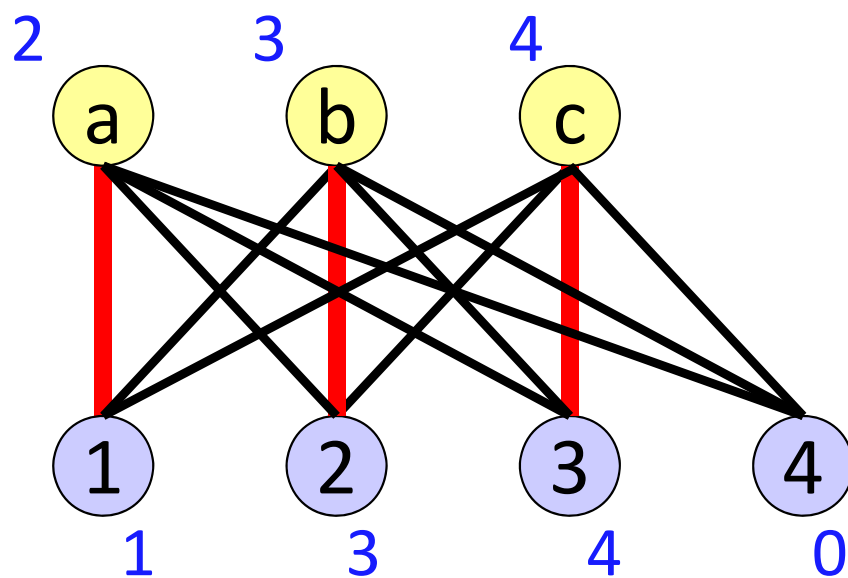
労働者の仕事への割当で得た収益をうまく配分

- $q(i)$ = 仕事 i の雇用者の取り分 (≥ 0)
- $p(j)$ = 労働者 j の取り分 (≥ 0)
- 労働者 j が仕事 i に従事 $\rightarrow q(i)+p(j) = v(i,j)$

皆が満足するように(不満をもたないように), 以下を決めたい:

- 労働者の仕事への割当
- 雇用者・労働者への収益の配分

不満のない仕事の割当と収益の配分



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

雇用者 a と
労働者②のペア
収益 $7 > 2 + 3$
→ 現在の割当
を破棄してペア
を組む可能性大

皆が満足する(不満をもたない)ための条件(安定性):

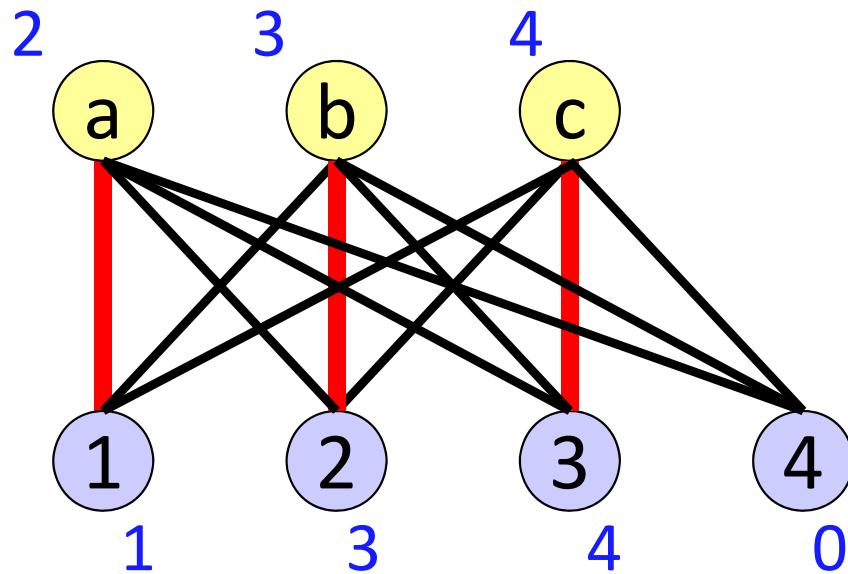
任意の雇用者 i , 労働者 j に対し, $q(i) + p(j) \geq v(i,j)$

命題:

安定性条件を満たす仕事の割当・収益の配分は必ず存在

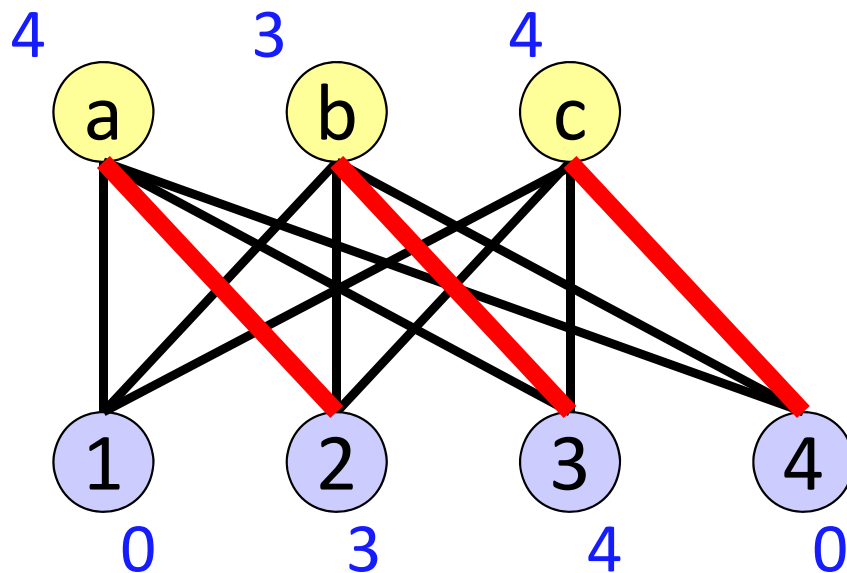
証明: 最大重みマッチングと双対最適解を選べば良い.

不満のない仕事の割当と収益の配分



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

雇用者 a と
労働者②のペア
収益 $7 > 2 + 3$
→ 現在の割当
を破棄してペア
を組む可能性大



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4