

数理経済学特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第2回

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

今後の予定

- 9/26, 10/3 最短路問題の復習
- 10/10 二部グラフの最大マッチング問題
- 10/13 休講
- 10/17 二部グラフの最大重みマッチング問題

(単一始点全終点)最短路問題

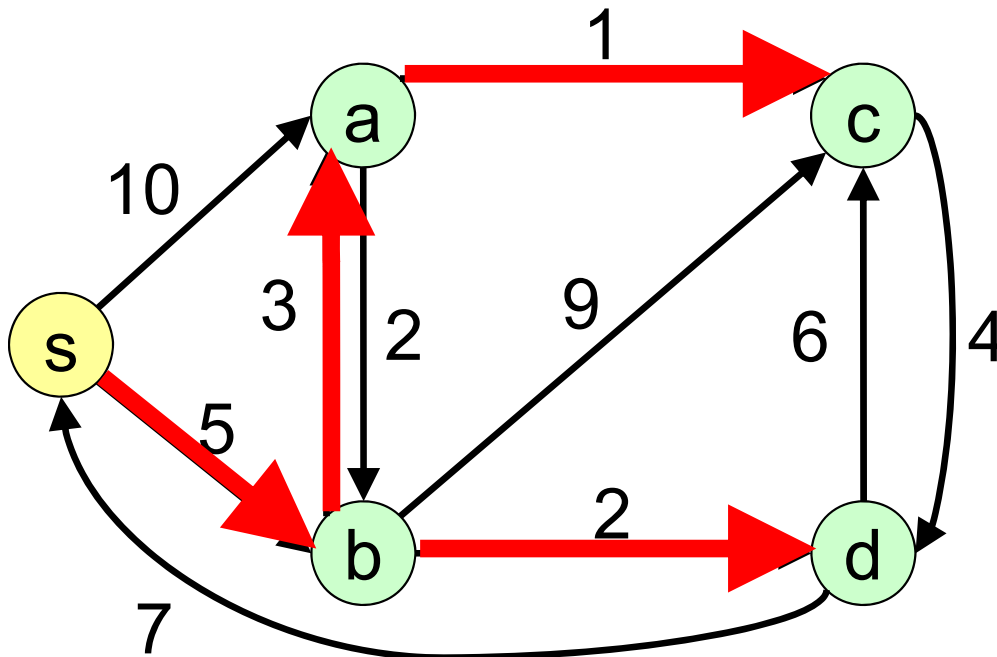
- 入力: 有向グラフ $G=(V, E)$

各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$), 始点 $s \in V$

- 出力: s から **すべての頂点 v への最短路 $P(v)$ とその長さ $d(v)$**

(s から v への**最短路 P^***

= s から v への有向路のうち, 枝の長さの和 $\ell(P^*)$ が最小のもの)



有向グラフ:
枝に向きの付いたグラフ

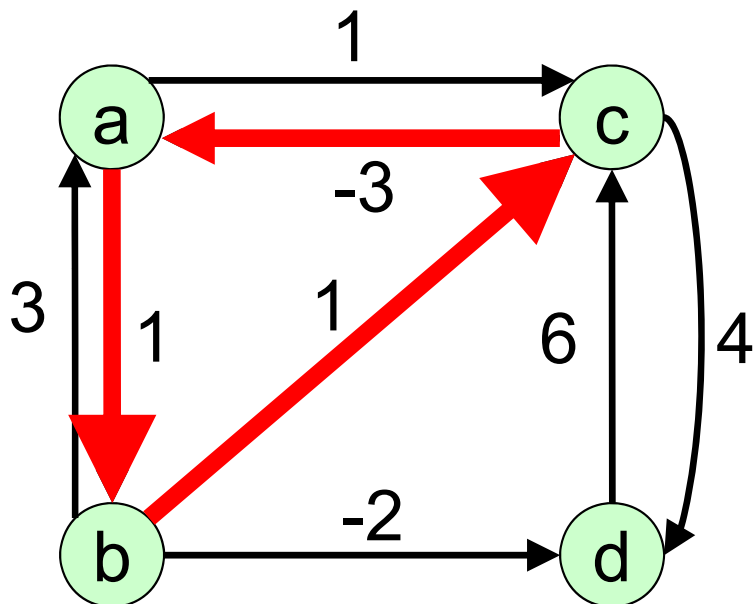
有向路:
路の各枝の向き付けが,
路の向き付け(始点から終点へ
の向き)と同じ

注意: 有向路は, 同じ頂点, 枝を
何回通っても可

枝の長さが
負の場合も扱う

関連する問題：グラフの負閉路の検出

- 入力：有向グラフ $G=(V, E)$
各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$)
- 出力：グラフに負閉路が「存在する」または「存在しない」の答え
存在するときは，負閉路を求める
(**負閉路** = 有向閉路のうち，枝の長さの和が負のもの)



有向閉路：
閉路路の各枝の向き付けが同じ

関連する問題：差分不等式系

- 入力： n 個の変数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ からなる, 次の形の不等式系

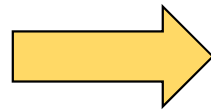
$$p_i - p_j \leq \alpha_{ij}, \quad \beta_i \leq p_i \leq \gamma_i$$

(注意：等式を含んでも良い)

- 出力：不等式系に解が「ある」または「ない」の答え
存在するときは, 解を求める

具体例

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, & p_3 - p_1 &\leq 1, \\ p_3 - p_2 &\leq 3, & p_4 - p_2 &\leq 5, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, & p_3 - p_4 &\leq 6, \\ p_1 &= 0, & p_4 &\leq 5 \end{aligned}$$

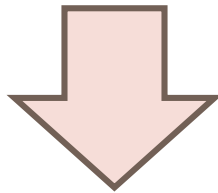


解あり

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0, 1, 1, 5)$$

ワルラス均衡の書き換え

- 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j$)
 $\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない ($\alpha(i) = 0$)
 $\rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割当られない $\rightarrow p(j) = 0$



- 入札者 i に財 j が割り当てられる
 $\rightarrow v(i, j) - p(j) \geq 0, v(i, j) - p(j) \geq v(i, h) - p(h) (\forall h \in N)$
- 入札者 i に財の割り当てがない
 $\rightarrow v(i, h) - p(h) \leq 0 (\forall h \in N)$
- 財 j が誰にも割当られない $\rightarrow p(j) = 0$

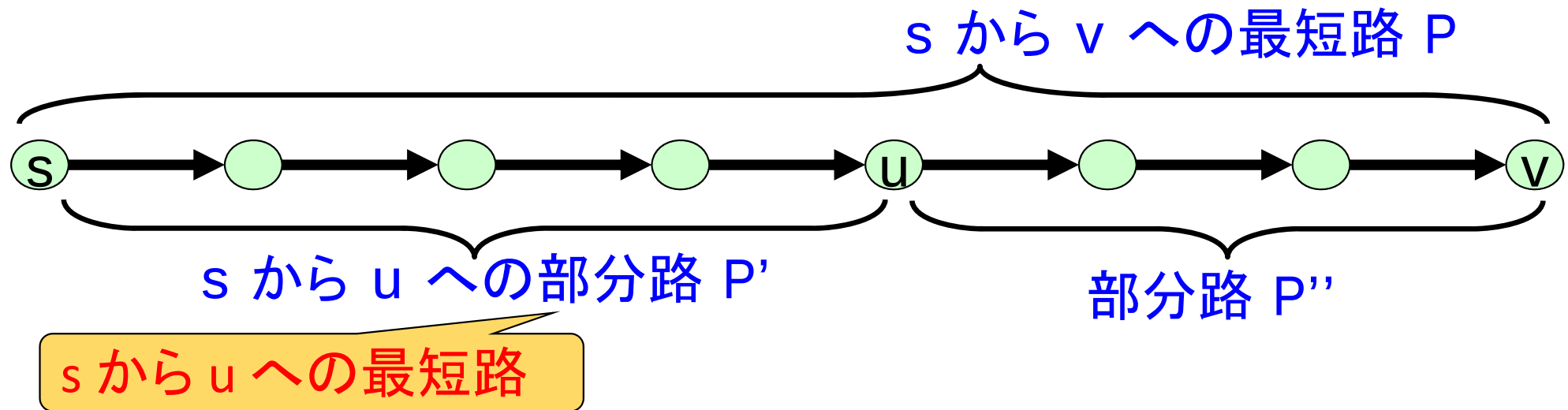
最短路の性質

最短路の部分路は最短路

命題 P : 頂点 s から頂点 v への最短路

P は途中に頂点 u を含むと仮定

→ s から u への P の部分路 P' は, s から u への最短路



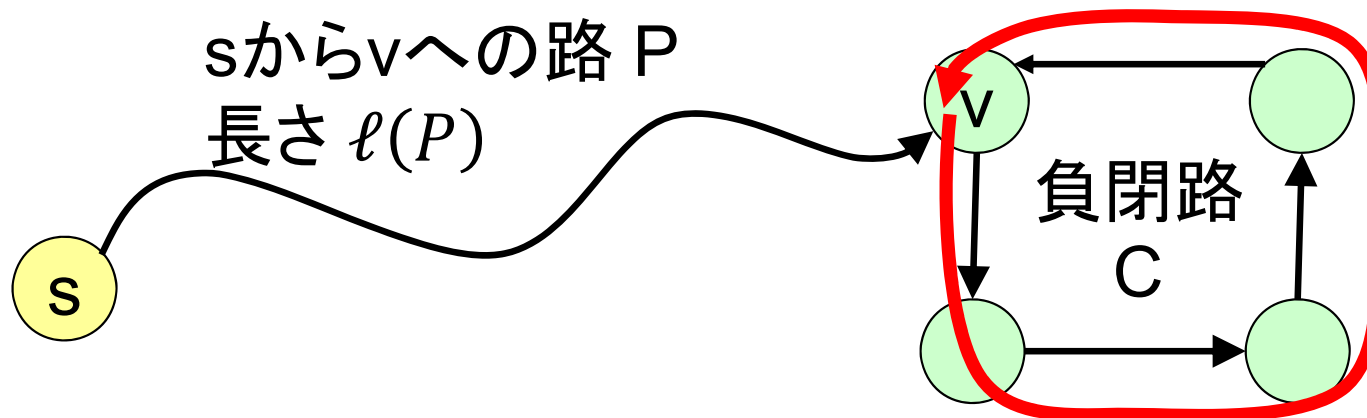
(証明) もし P' より短い, s から u への有向路 Q が存在する

→ s から v へ行くとき, u までは Q を使い, u からは P'' を使うと
その長さは $\ell(Q) + \ell(P'') < \ell(P') + \ell(P'') = \ell(P)$ (矛盾)

負閉路と最短路

- 負閉路が存在 $\rightarrow$ ある頂点への最短路は存在しない
 (対偶) 全ての頂点への最短路が存在 $\rightarrow$ 負閉路は存在しない

命題 グラフに負閉路 C が存在 (長さ $\ell(C) < 0$)
 かつ, 閉路 C 上の頂点に s から到達可能
 $\rightarrow C$ に含まれる各頂点 (および C から到達可能な頂点) v に対し,
 $\inf\{s \text{ から } v \text{ への路の長さ}\} = -\infty$ (最短路が存在しない)



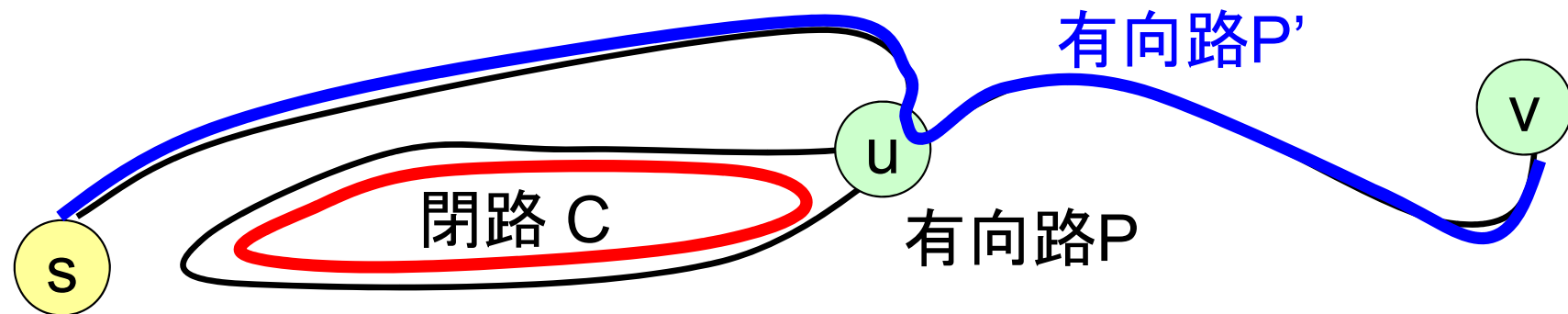
(証明) s から v への路として, 次のようなものを考える:

路 P を使って s から v に行く $\rightarrow$ 負閉路を k 回通って v に行く
 これも s から v への路, 長さ $\ell(P) + \ell(C) \times k$
 k を任意に大きくする $\rightarrow$ 路の長さが任意に小さくなる

最短路の枝数

命題 s から v への最短路が存在
 $\rightarrow$ 枝数 $\leq |V|-1$ の最短路が存在

(証明) P : s から v への最短路
 枝数が $|V|$ 以上と仮定 $\rightarrow$ 同じ頂点が2回現れる, つまり閉路を含む



路 P は, 閉路 C と, 枝数 $|V|-1$ 以下の有向路 P' に分解可能

閉路 C が負閉路 $\rightarrow v$ への最短路長 $= -\infty$ (矛盾)

正閉路 $\rightarrow$ 閉路 C を通らない方が長さが短くなる (矛盾)

$\therefore$ 閉路 C の長さ $= 0$ よって, 閉路 C を通らなくても長さ同じ
 枝数 $\leq |V|-1$

負閉路と最短路(続き)

命題 負閉路が存在しない

→ s から到達可能な各頂点への最短路が存在

(証明) 対偶を示す.

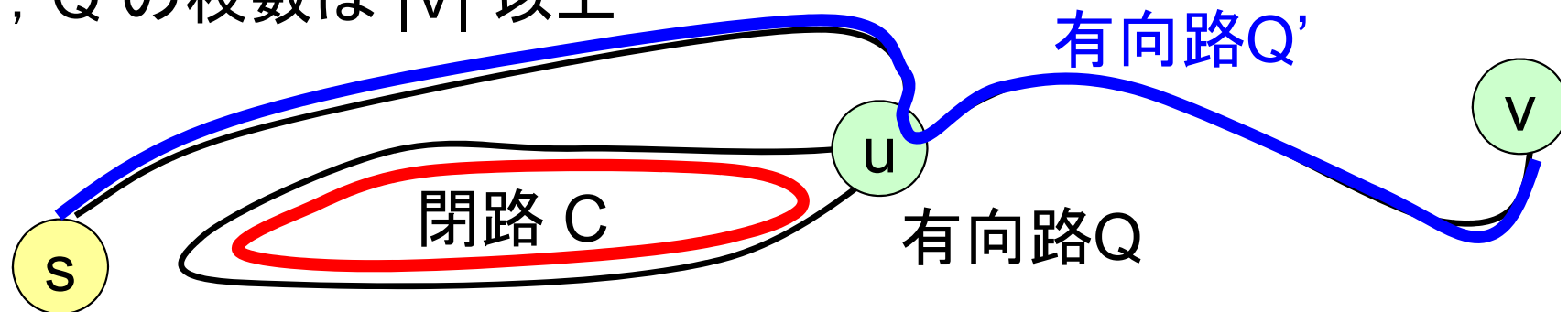
s から到達可能な v への最短路が存在しないと仮定.

$\alpha = \min\{\ell(P) \mid P: s \text{ から } v \text{ への路, 枝数} \leq |V|-1\}$ とおく → $\alpha > -\infty$

$\inf\{s \text{ から } v \text{ への路の長さ}\} = -\infty$ なので,

s から v へのある路 Q が存在して, $\ell(Q) < \alpha$

α の定義より, Q の枝数は $|V|$ 以上



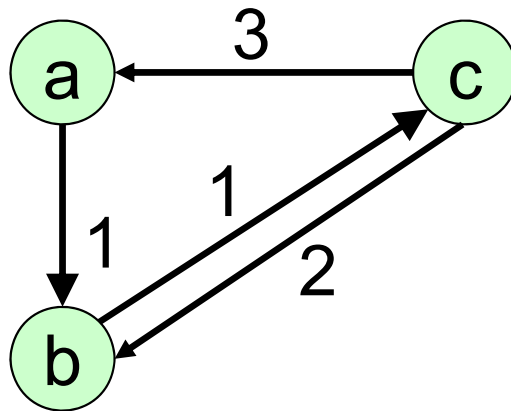
∴ 路 Q は(複数の)閉路 C と枝数 $|V|-1$ 以下の有向路 Q' に分解可能
 $\ell(Q') \geq \alpha > \ell(Q) = \ell(C) + \ell(Q')$ より,
 $\ell(C) < 0$ なので C は負閉路

ポテンシャルと負閉路

最短路問題における
便利な道具

定義: 実数 $p(v) (v \in V)$ はポテンシャル

↔ 各枝 (u, v) に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v)$ を満たす



$p(a) = 3, p(b) = 2, p(c) = 0$ はポテンシャル

※ポテンシャルは存在しないこともある
(例: (c, a) の枝長を -3 にした場合)

命題 ポテンシャルは存在 → 負閉路は存在しない
(対偶: 負閉路が存在 → ポテンシャルは存在しない)

(証明) 任意の閉路 C に対し,

不等式 $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v) ((u, v) \in C)$ を辺々足す

→ $0 = \sum_{(u,v) \in C} [p(v) - p(u)] \leq \sum_{(u,v) \in C} \ell(u, v) = \text{閉路の長さ}$

ポテンシャルと負閉路と最短路

命題 ポテンシャルは存在 $\leftarrow$ 負閉路は存在しない
 (対偶: 負閉路が存在 $\leftarrow$ ポテンシャルは存在しない)

(証明) ある頂点をひとつ選び, s とする.

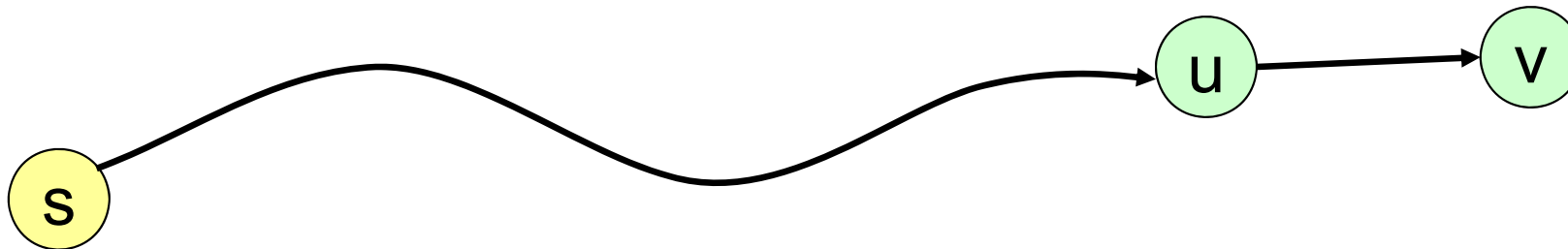
各頂点 v に対し, s から到達不可能ならば,

枝 (s,v) を新たにおき, 長さ=十分大きい正数 とする

→ 修正後のグラフの各頂点は s から到達可能, 負閉路が存在しない

∴ s から各頂点への最短路が存在

$d(v) = s$ から頂点 v への最短路長 とする $\leftarrow$ ポテンシャルになる



任意の枝 (u,v) に対し, P : 頂点 s から u への最短路 とおく

→ $\tilde{P} = P \cup \{(u,v)\}$ は s から v への路,

その長さ = $d(u) + \ell(u,v) \geq v$ への最短路長 = $d(v)$

ポテンシャルの計算

前のスライドの命題および証明より,

グラフに負閉路が存在しない

→ ポテンシャルは必ず存在し, 計算可能

計算方法:

(1) 証明と同様にグラフを修正

(2) 修正後のグラフにおいて, s から各頂点への最短路長を求める

最短路長の計算方法については次回の授業にて.

ベルマン・フォードのアルゴリズム

手順0: $d_0(s) = 0, d_0(v) = +\infty (\forall v \neq s)$ とおく. $k=1$ とする.

- s から枝数0でたどり着けるのは s のみなので

手順1: 各頂点 v に対し, 以下の式で $d_k(v)$ を計算

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) \mid (u, v) \in E\}]$$

手順2: $k < |V|$ ならば $k:=k+1$ とおいて手順1へ戻る.

$k=|V|$ ならば手順3へ.

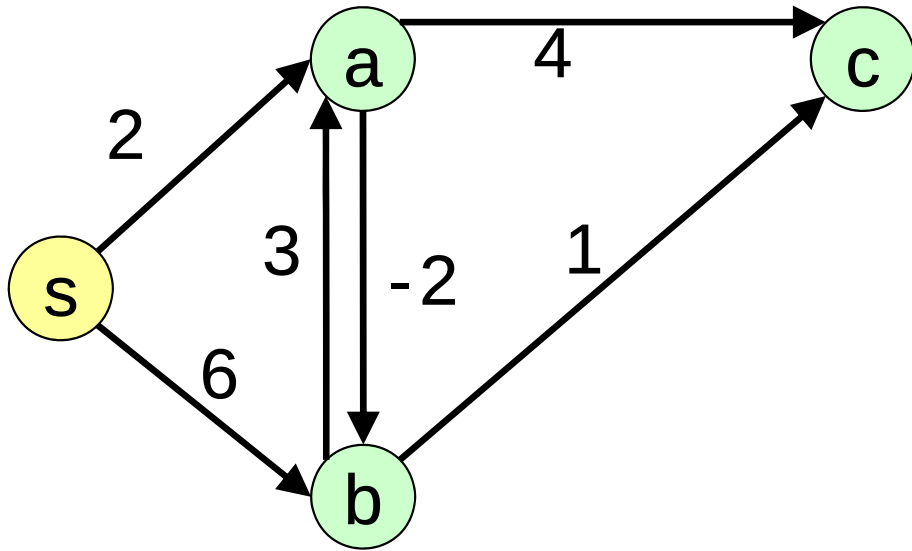
手順3: ある v に対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$ が成立 $\rightarrow$ 「負閉路存在」

全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ が成立

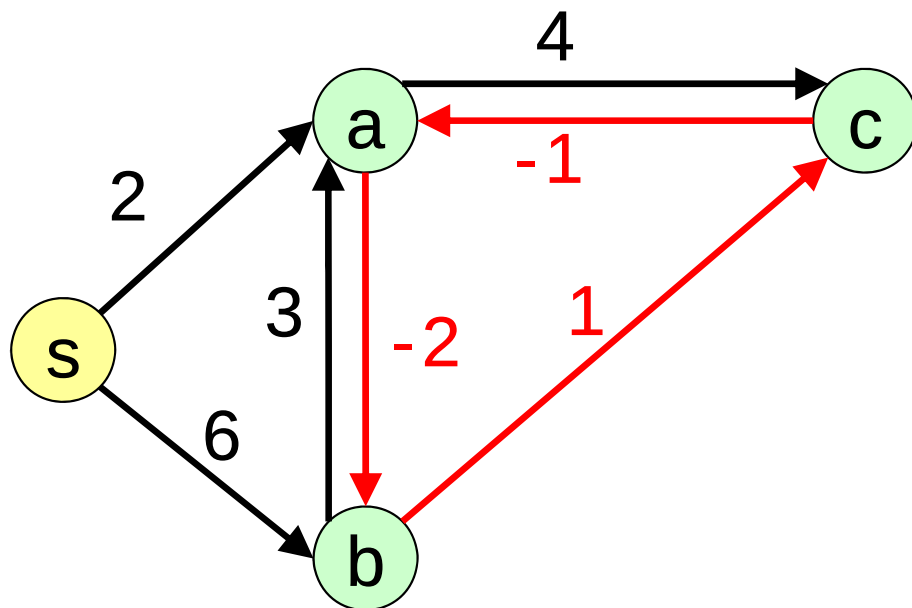
$\rightarrow$ 最短路長 $d_{n-1}(v)$ を出力

最短路長だけでなく, 最短路を計算することも
(若干の修正により) 可能である

実行例



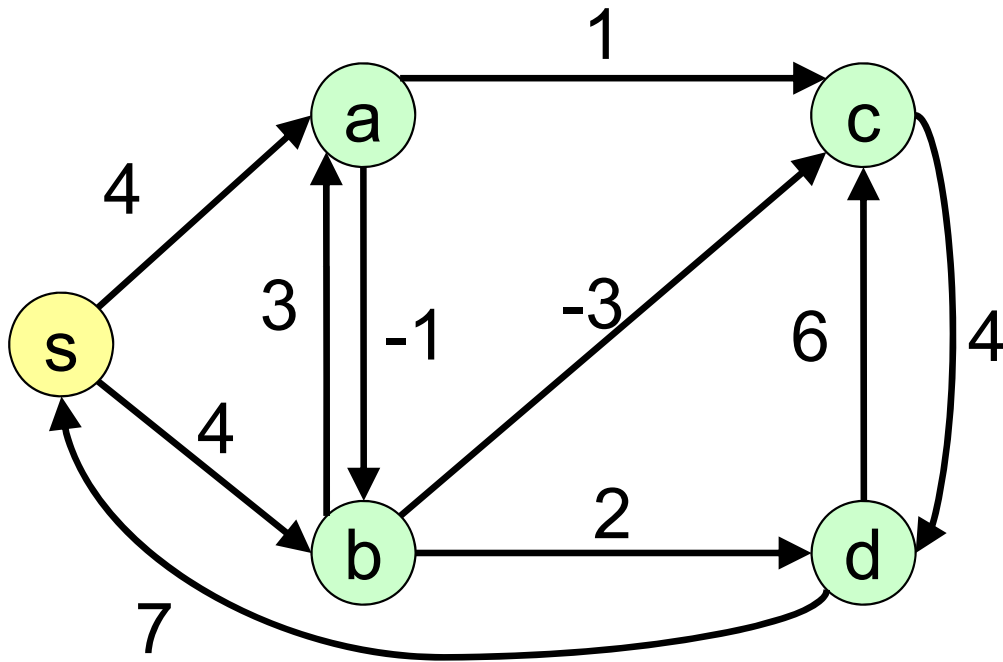
	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	2	2	2	2
b	∞	6	0	0	0
c	∞	∞	6	1	1



	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	2	2	2	0
b	∞	6	0	0	0
c	∞	∞	6	1	1

演習問題

問1: 下記のグラフにおける, s から各頂点への最短路長を, ベルマン・フォードのアルゴリズムで計算せよ.



	k=0	1	2	3	4	5
s	0					
a	$+\infty$					
b	$+\infty$					
c	$+\infty$					
d	$+\infty$					