

数理経済学特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第12回 評価関数の粗代替性

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

財集合の評価関数

- 財の評価

複数需要モデル

入札者は財の集合を評価

→ 財の集合 X に対して評価値 $v_i(X)$

集合 X に関する関数 (評価関数, valuation function)

一般的な仮定

- 空集合の評価値 $v_i(\emptyset)$ は 0
- v_i は単調非減少: $X \subseteq Y$ ならば $v_i(X) \leq v_i(Y)$

ワルラス均衡

- 定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
 - $D_i(p) = \arg \max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$
- 定義: 価格ベクトル p^* と財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ の組は **ワルラス均衡**
 $\iff X_i \in D_i(p^*) \ (i = 1, \dots, m), \quad p(j) = 0 \ (\forall j \in X_0)$

価格 p^* の下で
皆が最良の
財集合

例: $p = (60, 60, 60, 60, 60)$ のとき

- Aさん: $D_A(p) = \{ \{1\} \}$
- Bさん: $D_B(p) = \{ \{2, 5\} \}$
- Cさん: $D_C(p) = \{\text{財の数2または3}\}$

$\rightarrow p$ と配分 $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ はワルラス均衡

代替性と補完性

- 2つの財の関係
 - **代替的**： 2つの財が類似，一方を他方で置き換え可能
どちらかがあれば嬉しい
両方あっても，あまり嬉しくない
 - 具体例：紅茶とコーヒー，2種類のいす，レタスとキャベツ
 - **補完的**： 2つの財の性能・能力が補完的
両方あれば嬉しい，片方だけでは不十分
 - 具体例：食卓と椅子，プリンタとインク，ゲーム機とソフト
- 財の集合が**代替的(補完的)**
 - ◀→ 集合内の任意の2つの財が**代替的(補完的)**

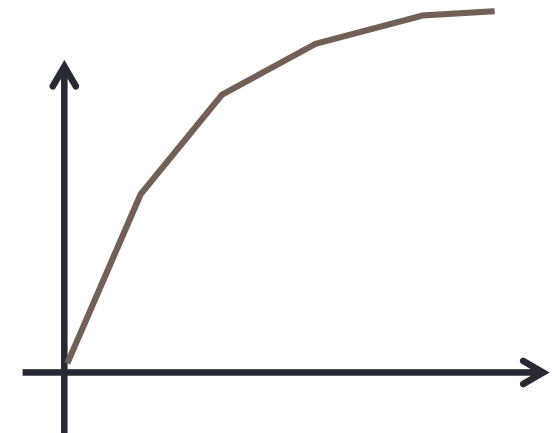
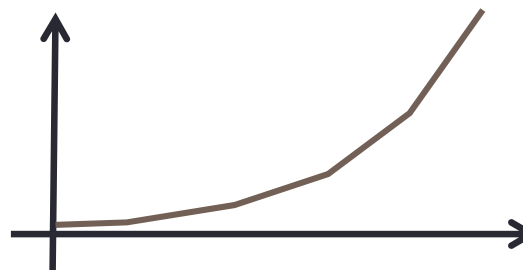
この講義：**代替的な財(代替財)**を主に扱う

代替財に対応する評価関数の例

ポイント: 財集合の評価値 $\leq$ 個々の評価値の和

- 重み和 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) (additive)
- 財集合 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) の中の
一番良い財にのみ依存 (unit-demand)
{①, ②, ③} $\rightarrow$ 評価値 70, {③, ④, ⑤} $\rightarrow$ 評価値 100
- 財の数に依存, かつ上に凸 (symmetric & concave)
(1つ: 100, 2つ: 180, 3つ: 240, 4つ: 280, 5つ: 300)

※ symmetric & convex ならば補完的

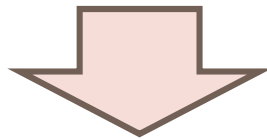
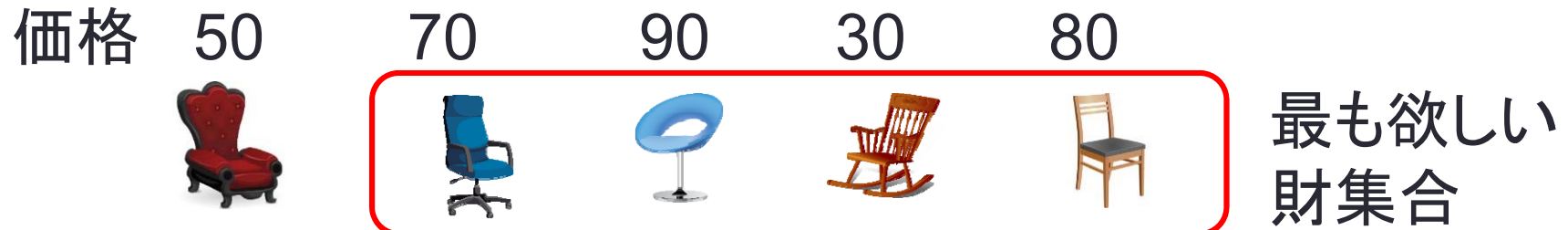


より一般的な評価関数: 粗代替的評価関数

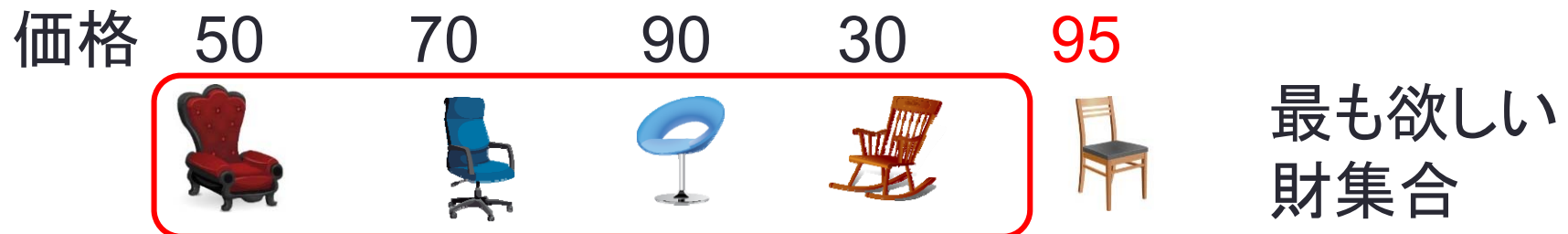
粗代替性 $\equiv$ ある財が値上がりしたら, 他の財の欲しさが高まる

定義: 評価関数 $v_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす[Kelso-Crawford(1982)]



ある財の価格が増加



価格不変の財は引き続き欲しい

より一般的な評価関数: 粗代替的評価関数

粗代替性 $\equiv$ ある財が値上がりしたら, 他の財の欲しさが高まる

定義: 評価関数 $v_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす [Kelso-Crawford(1982)]

$$\iff \forall p \in \mathbb{R}^N, q = p + \lambda e_j,$$

$$\forall X \in D_i(p), \exists Y \in D_i(q)$$

$$\text{s.t. } X \setminus \{j\} \subseteq Y$$

$$D_i(p) = \arg \max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$$

定理 [Kelso-Crawford(1982)]:

各入札者の評価関数が粗代替性を満たす $\rightarrow$ ワルラス均衡が存在

粗代替性を満たす評価関数の例

- 重み和 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) (additive)

$p = (40, 80, 10, 60, 100)$ のとき $D_i(p) = \{\{1, 3\}, \{1, 3, 5\}\}$
 $\rightarrow q = (60, 80, 10, 60, 100)$ のとき $D_i(q) = \{\{3\}, \{3, 5\}\}$
 よって, $X = \{1, 3\} \rightarrow Y = \{3\}$ を選べば条件を満たす
 $X = \{1, 3, 5\} \rightarrow Y = \{3, 5\}$

- 財集合 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) の中の
一番良い財にのみ依存 (unit-demand)

$p = (40, 80, 10, 0, 100)$ のとき $D_i(p) = \{\{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$
 $\rightarrow q = (40, 80, 40, 0, 100)$ のとき $D_i(q) = \{\{4\}\}$
 よって, $X = \{3\} \rightarrow Y = \{4\}$ を選べば条件を満たす
 $X = \{3, 4\} \rightarrow Y = \{4\}$

粗代替性と等価な性質：単改良性

定義： 単改良性(single improvement condition) [Gul-Stacchetti(1999)]

利得が最大でない→財1個の削除, 追加, または交換により
利得を増やすことが可能

価格 50



70



90



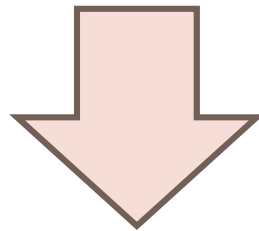
30



80



最も欲しい
財集合ではない



高々1つの財の入れ替えで
利得が増加



財を1つ削除



財を1つ追加



財を1つ交換

粗代替性と等価な性質：単改良性

利得が最大でない $\rightarrow$ 財1個の削除, 追加, または交換により
利得を増やすことが可能

定義: 単改良性(single improvement condition) [Gul-Stacchetti(1999)]

$\forall p \in \mathbb{R}^N, \forall X \subseteq N, \text{ if } X \notin D_i(p)$

$\rightarrow \exists Y \subseteq N$ such that $v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p_j > v_i(X) - \sum_{j \in X} p_j$

& 以下の (i) or (ii) or (iii) 成立

(i) $\exists j \in X: Y = X \setminus \{j\}$, (ii) $\exists h \in N \setminus X: Y = X \cup \{h\}$,

(iii) $\exists j \in X, \exists h \in N \setminus X: Y = X \setminus \{j\} \cup \{h\}$

定理[Gul-Stacchetti(1999)]:

評価関数 v_i は粗代替性を満たす $\leftrightarrow$ 単改良性を満たす

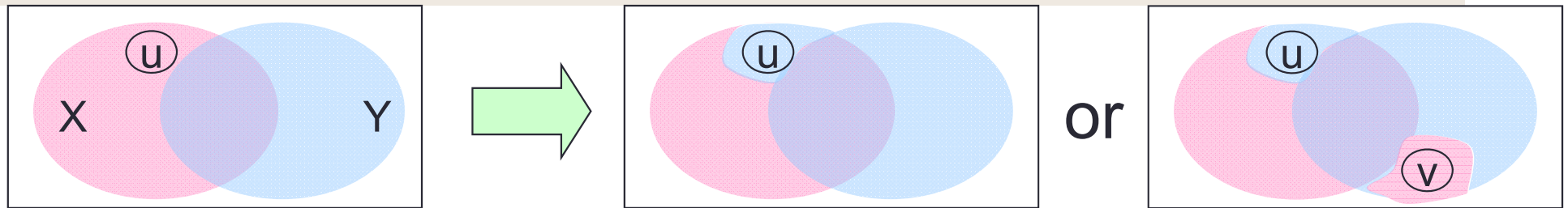
粗代替性と等価な性質: $M^\sharp$ 凹性

定義: $M^\sharp$ 凹性($M^\sharp$ -concavity) [Murota-Shioura(1999)]

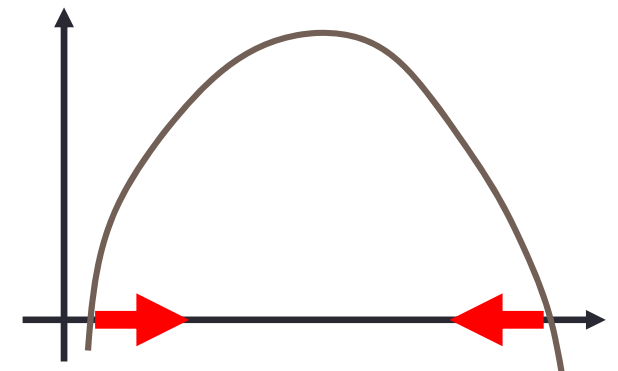
$\forall X, Y \subseteq N, \forall u \in X \setminus Y$, (i) or (ii) 成立:

(i) $f(X) + f(Y) \leq f(X - u) + f(Y + u)$

(ii) $\exists v \in Y \setminus X: f(X) + f(Y) \leq f(X - u + v) + f(Y + u - v)$



- 離散的な凹関数
- 価格ベクトルを使わない性質



定理[Fujishige-Yang (2003)]:

効用関数 f_i は粗代替性を満たす $\iff M^\sharp$ 凹性を満たす

粗代替性, 単改良性, $M^\sharp$ 凹性の関係

- 評価関数 $v_i: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
粗代替性 $\iff$ 単改良性 $\iff M^\sharp$ 凹性
- 等価な条件ではあるが, ある主張を示す際の「使いやすさ」では
 $M^\sharp$ 凹性がよい. 粗代替性は使いにくい
- 実際, 「 $M^\sharp$ 凹性 $\rightarrow$ 単改良性」「 $M^\sharp$ 凹性 $\rightarrow$ 粗代替性」
「単改良性 $\rightarrow$ 粗代替性」は(比較的)証明しやすいが, 逆は難しい

M₁凹性→単改良性の証明

$p \in \mathbb{R}^N$, $X \subseteq N$, $X \notin D_i(p)$ とする.

単改良性の (i), (ii), または (iii) が成り立つことを示す.

要素数 $|X \setminus Y| + |Y \setminus X|$ 最小の $Y \in D_i(p)$ を選ぶ.

$X \neq Y$ なので, $X \setminus Y \neq \emptyset$ または $Y \setminus X \neq \emptyset$

(Case 1) $X \setminus Y \neq \emptyset$

$u \in X \setminus Y$ とすると, M₁凹性より $v_i(X) + v_i(Y) \leq v_i(X - u) + v_i(Y + u)$

または $\exists v \in Y \setminus X$ s.t. $v_i(X) + v_i(Y) \leq v_i(X - u + v) + v_i(Y + u - v)$

後者の場合を考える(前者も同様). $Y' = Y + u - v$ とおく.

$p(X) + p(Y) = p(X - u + v) + p(Y')$ より,

(A) $v_i(X) - p(X) + v_i(Y) - p(Y) \leq v_i(X - u + v) - p(X - u + v) + v_i(Y') - p(Y')$

$|X \setminus Y'| + |Y' \setminus X| < |X \setminus Y| + |Y \setminus X|$ より, $Y' \notin D_i(p)$

$\therefore v_i(Y') - p(Y') < v_i(Y) - p(Y)$

式(A) と合わせて, $v_i(X) - p(X) < v_i(X - u + v) - p(X - u + v)$

$\therefore$ 単改良性の (iii) 成立

(Case 2) $Y \setminus X \neq \emptyset$ はCase 1と同様に証明できるので省略

ワルラス均衡と総評価値最大化

- 単一需要モデルの場合： 総評価値最大の配分 → 均衡配分

定理：

最大重みマッチングに対応する財の配分 $\alpha(i)$ ($i \in B$) に対し、ある価格 $p(j)$ ($j \in N$) が存在し、これらの組は均衡となる

- 複数需要モデルの場合： 評価関数が粗代替性を満たすとき
総評価値最大の配分 → 均衡配分

定理： 入札者の評価関数は粗代替性を満たすと仮定。

このとき、最大化問題 $\max\{\sum_{i=1}^m f_i(Y_i) \mid (Y_0, Y_1, \dots, Y_m) \text{ は財の配分}\}$
の最適解 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ に対し、
ある価格 $p(j)$ ($j \in N$) が存在し、これらの組は均衡となる

(証明の概略) 整数計画問題として定式化 → LP に緩和
相補性を用いた最適性条件より均衡であることを証明

双対性を用いた証明(1)

- 総評価値最大化問題を, 整数計画問題として定式化

最大化 $\sum_{i \in B} \sum_{Y \subseteq N} v_i(Y) x_{i,Y}$

条件 $\sum_{Y \subseteq N} x_{i,Y} = 1 \quad (\forall i \in B)$

$$\sum_{i \in B} \sum_{j \in Y \subseteq N} x_{i,Y} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$$

$$x_{i,Y} \in \{0,1\} \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$$

この問題の最適解 $\longleftrightarrow$ 総評価値を最大化する配分における
 $X_1, X_2, \dots, X_m$

双対性を用いた証明(2)

$x_{i,Y} \in \{0,1\}$ を不等式条件 $x_{i,Y} \geq 0$ に緩める

→ 線形計画問題へ

- 得られた線形計画問題の任意の許容解は $x_{i,Y} \leq 1$ を満たす
- 最適解 $x_{i,Y}^*$ は 0 or 1 とは限らない

0 or 1 → 元の整数計画問題の最適解

→ 総評価値を最大化する配分に対応

定理: 前のスライドの整数計画問題の最適解は,
上記の線形計画問題の最適解

(証明の概略) 評価関数が粗代替性を満たす → M₁凹性を満たす
この性質を使って, 非零な $x_{i,Y}$ の数を減らす → 整数解になる

双対性を用いた証明(3)

線形計画緩和の双対問題

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + \sum_{j \in Y} p(j) \geq v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$
 $p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

線形計画問題に対する相補性定理を適用して, 以下が得られる

定理: 線形計画問題の主問題の許容解 $x_{i,Y}$ は最適解

↔ 以下の条件を満たす, 双対問題の解が存在

$$q(i) + \sum_{j \in Y} p(j) \geq v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$$

$$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$$

$$x_{i,Y} > 0 \text{ ならば } q(i) + \sum_{j \in Y} p(j) = v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$$

$$\sum_{i \in B} \sum_{j \in Y \subseteq N} x_{i,Y} < 1 \text{ ならば } p(j) = 0 \quad (\forall j \in N)$$

双対性を用いた証明(4)

主問題の許容解 $x_{i,Y}$ が財の配分に対応する場合,
相補性条件(最後の2条件)は下記のように書き換えられる

$$\begin{aligned} X_i = Y &\rightarrow q(i) + \sum_{j \in Y} p(j) = v_i(Y) \\ j \in N \text{ が誰にも配分されない} &\rightarrow p(i) = 0 \end{aligned}$$

∴ 前の定理は以下のように書き換えられる(証明終わり)

定理: 財の配分 $X_0, X_1, \dots, X_m$ は総評価値が最大
 $\leftrightarrow$ 以下の条件を満たす, 双対問題の解が存在
 $q(i) + \sum_{j \in Y} p(j) \geq v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$
 $p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$
 $X_i = Y \rightarrow q(i) + \sum_{j \in Y} p(j) = v_i(Y)$
 $j \in N \text{ が誰にも配分されない} \rightarrow p(i) = 0$

双対性を用いた証明(5)

- $q(i) = v(i, j) - \sum_{j \in X_i} p(j)$ を使って変数 $q(i)$ を消去する

定理: 財の配分 $X_0, X_1, \dots, X_m$ は総評価値が最大

↔ 以下の条件を満たす価格 $p(j)$ ($j \in N$) が存在

$$v(i, j) - \sum_{j \in X_i} p(j) \geq v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$$

$$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N), \quad j \in N \text{ が誰にも配分されない} \rightarrow p(j) = 0$$

均衡の計算：評価値が既知の場合

- 前のスライドの定理より，総評価値最大の財の配分は均衡配分
- 総評価値最大配分の計算：増加路を使ったアルゴリズムを
(大幅に)一般化した方法により可能
- 均衡配分 $X_0, X_1, \dots, X_m$ が得られた $\rightarrow$ 均衡価格の計算へ
 - $X_i \in D_i(p)$ ($i = 1, \dots, m$), $p(j) = 0$ ($j \in X_0$) を満たす p を求める
 $\rightarrow$ 最短路問題(差分不等式系の解を求める問題)に帰着可能

$$p(h) - p(j) \geq v_i(X_i - j + h) - v_i(X_i) \quad (j \in X_i, h \in N - X_i)$$

$$p(h) \geq v_i(X_i + h) - v_i(X_i) \quad (h \in N - X_i)$$

$$-p(j) \geq v_i(X_i - j) - v_i(X_i) \quad (j \in X_i)$$
- 総評価値最大の配分の計算と同時に計算することも可能

レポート問題

次の評価関数について考える. ただし,

$$N = \{1, 2, 3, 4\}, \quad v_1 = 5, v_2 = 7, v_3 = 4, v_4 = 3$$

$$v_i(\emptyset) = 0, v(\{j\}) = v_j,$$

$|X| \geq 2$ のとき: $v_i(X) = \{v_j \mid j \in X\}$ の中の

最大値 + 2番目に大きい値

$$(\text{例: } v(\{4\}) = 3, \quad v(\{1, 4\}) = 7 + 3 = 10, \quad v(\{2, 3, 4\}) = 7 + 4 = 11)$$

問1: 価格 $p = (1, 2, 0, 0)$, $q = (1, 5, 0, 0)$ に対する $D_i(p)$, $D_i(q)$ を計算せよ

問2: 各 $X \in D_i(p)$ に対し, $Y \supseteq X \setminus \{2\}$ を満たす $Y \in D_i(q)$ を求めよ

問3: $X \notin D_i(p)$ なる各財集合 X に対し, 単改良性の条件を満たす
財集合 Y を求めよ

問4: $X = \{2, 4\}$, $Y = \{1, 3, 4\}$, $u = 2$ に対し,

$$f(\textcolor{red}{X}) + f(\textcolor{blue}{Y}) \leq f(\textcolor{red}{X} - \textcolor{red}{u} + \textcolor{red}{v}) + f(\textcolor{blue}{Y} + \textcolor{blue}{u} - \textcolor{blue}{v})$$

を満たす $v \in Y \setminus X$ を求めよ