

数理経済学特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第9回 均衡を近似的に計算するアルゴリズム

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

評価値が既知の場合のアルゴリズム

定理： 財の均衡配分 $\leftrightarrow$ 評価値に関する最大重みマッチング

∴ 評価値が既知 $\rightarrow$

均衡配分の計算は、**最大重みマッチング問題**に帰着可能

均衡配分が得られた $\rightarrow$

均衡価格の計算は、**最短路問題**に帰着可能

評価値が分からない場合は？

評価値の扱いについて

入札者の評価値は個人情報

→ オークション主催者に 直接 知らせたくない

代案: 評価値の情報を **間接的に** 伝える

(例: 所与の価格に関して, 利得最大の財)

1. 主催者: 各財の暫定価格を決定
2. 各入札者: 暫定価格の下で**利得最大の財**を報告
3. 入札者全員に(重複無く)最も欲しい財を
配分可能 → 終了. 現在の価格は均衡価格
配分不可能 → 主催者は暫定価格を適切に変更

反復オークション と呼ばれる

単一財の場合 → **イングリッシュ・オークション** など

反復オークションのアルゴリズム

以下の2つを紹介

- その1: 均衡を近似的に計算
 - 単調に価格を増加, **均衡配分**
(および(極小)均衡価格の近似値)を求める
 - 各反復で, 入札者の利得最大の財**ひとつ**の情報が必要
 - 価格増加のルールは簡単: 希望が重複→価格を増やす
- その2: 均衡を厳密に計算
 - 単調に価格を増加, (極小)**均衡価格**
(および均衡配分)を求める
 - 各反復で, 入札者の利得最大の財**すべての**情報が必要
 - 価格増加のルールは複雑:
 - 得た情報を使い, 価格を増やす財をうまく選ぶ

均衡を近似的に計算するアルゴリズム

アルゴリズムの流れ

- 各入札者は、現在の価格の下で利得最大の財を一つ選ぶ
- 同じ財を複数の入札者が選ぶ
→ ひとりに割り当て. その財の価格を上昇させる.

異なる分野で独立に提案される

- Bertsekas (1979) --- 数理計画, オペレーションズ・リサーチ
 - 最大重みマッチング問題のアルゴリズムとして提案
 - この分野では「オークションアルゴリズム」とよばれる
- Demange, Gale, Sotomayor (1986)
 - 数理経済, オークション理論
 - ワルラス均衡(の近似解)を求めるアルゴリズムとして提案
 - Crawford, Knoer (1981) の特殊ケース(らしい)

均衡を近似的に計算するアルゴリズム: 詳細

δ : アルゴリズムのパラメータ, > 0

ステップ0: 全ての財の価格 $p(j)$ を 0 にする.

各入札者は割り当てられた財なし.

$$\max_j \{v(i,j) - p(j)\}$$

ステップ1: 各入札者 i に対し,

財の割当あり or 最大利得 $\leq 0 \rightarrow$ 終了

ステップ2: 財の割当なし, かつ 最大利得 > 0 なる

入札者 i を選ぶ.

ステップ3: $v(i,j) - p(j)$ 最大の j を選び, i に j を割り当て.

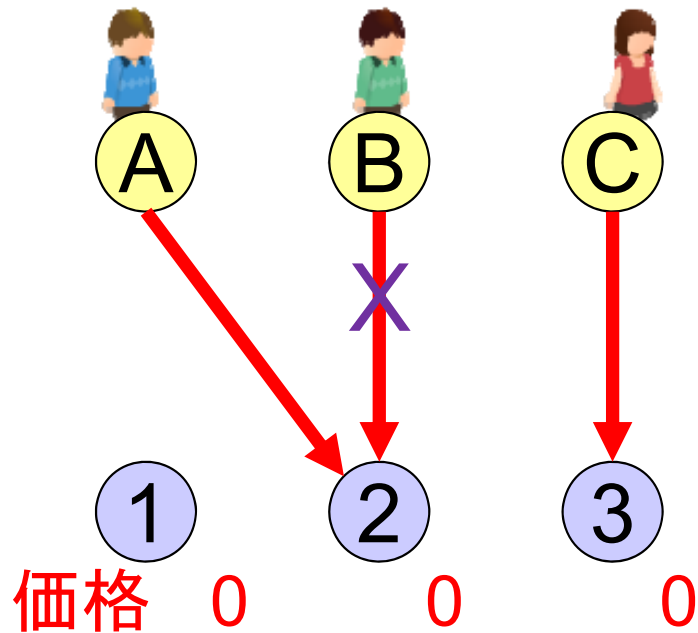
入札者 k が既に財 j に割り当てられていた

$\rightarrow k$ への j の割り当てを取消. $p(j) := p(j) + \delta$

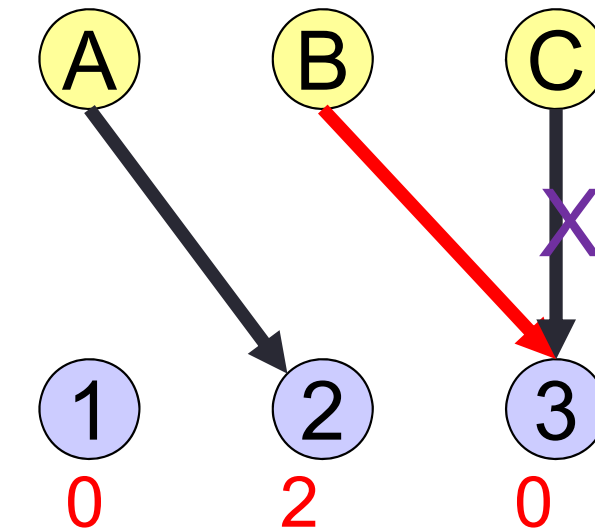
ステップ1へ.

アルゴリズムの実行例(1)

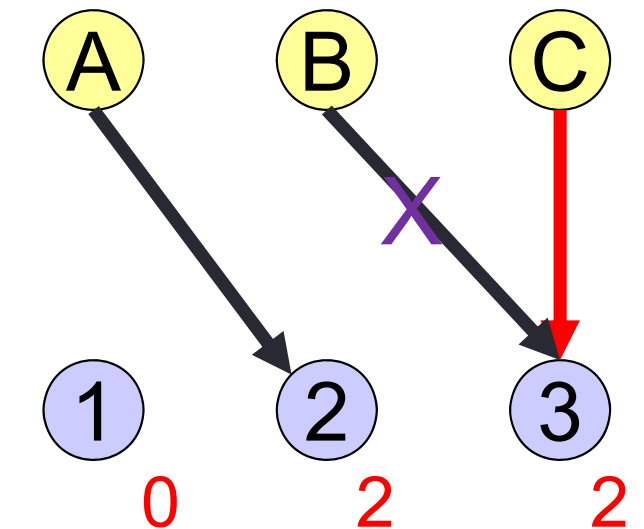
$\delta=2$ のとき



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4



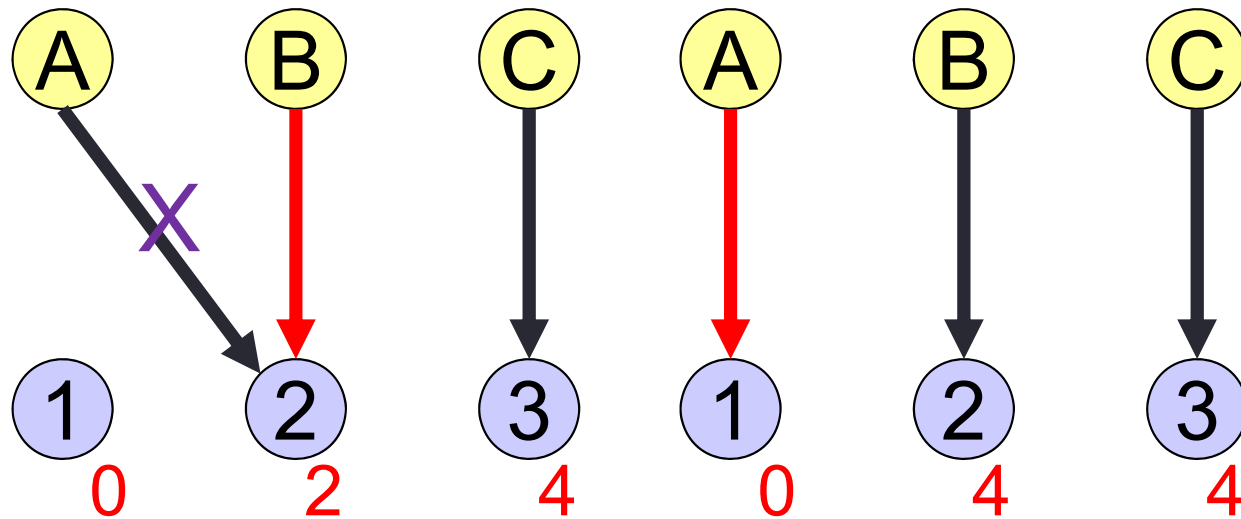
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	2	4	4



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	0	2	2

アルゴリズムの実行例(1)

$\delta=2$ のとき



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	-2	0	0

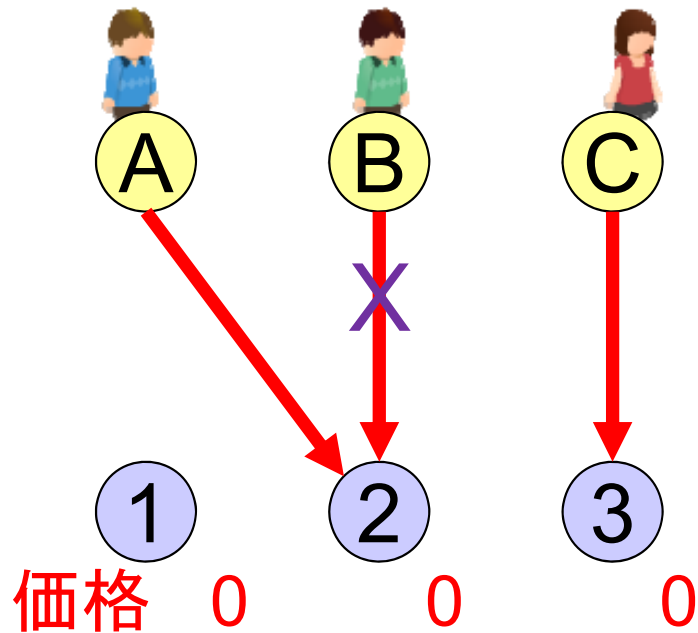
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	2	1	-1
③	-2	0	0

終了
均衡配分○
均衡価格○

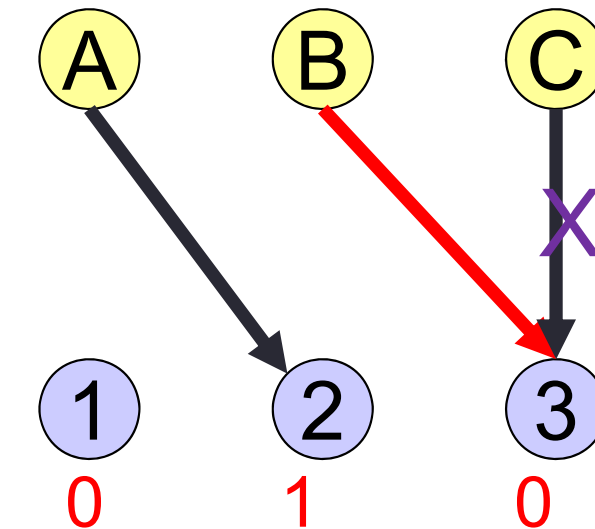
参考:
極小均衡価格
0 3 2

アルゴリズムの実行例(2)

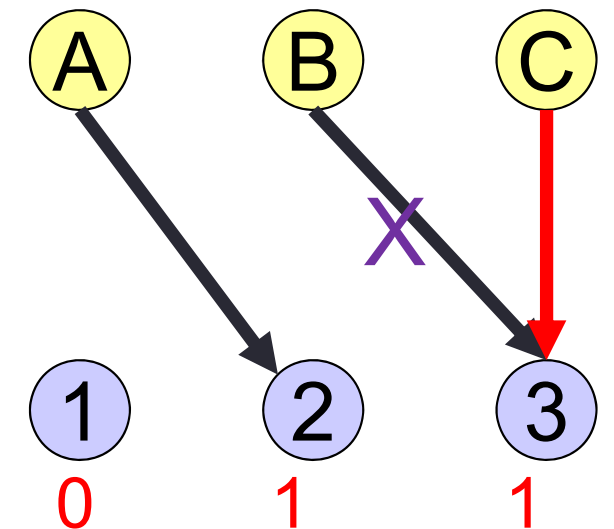
$\delta=1$ のとき



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4



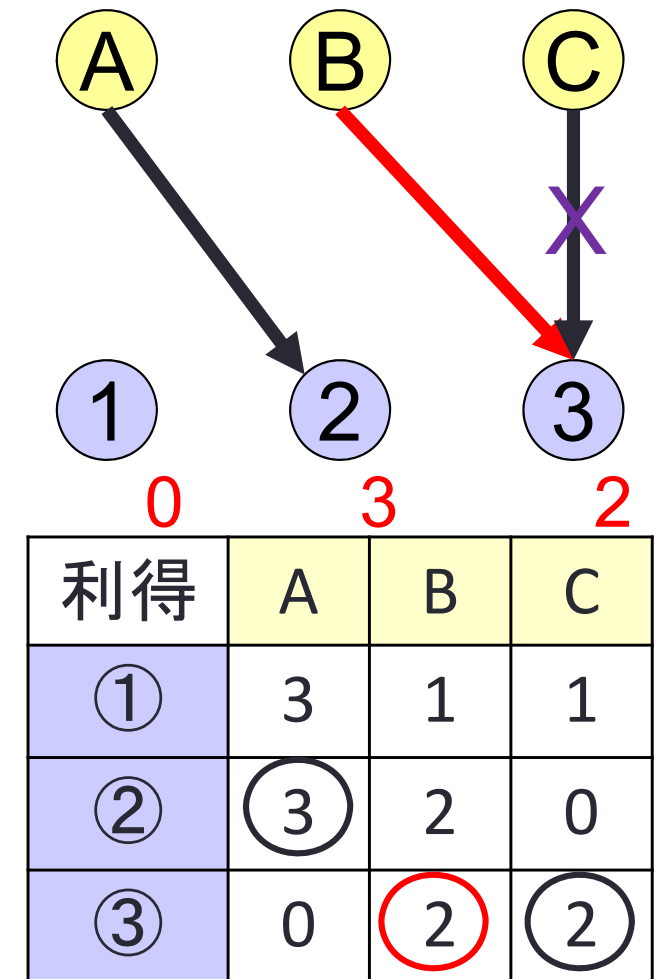
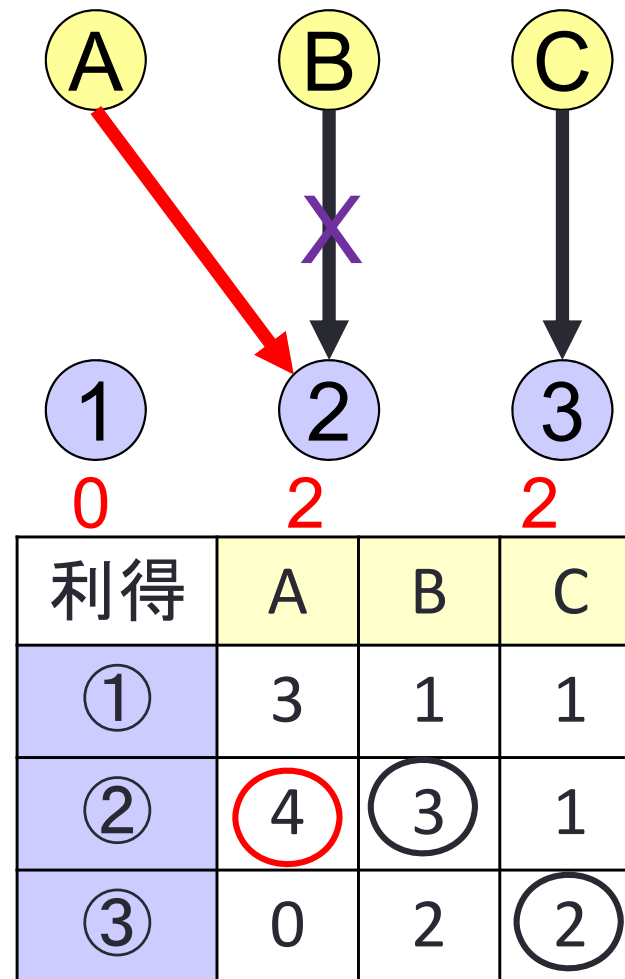
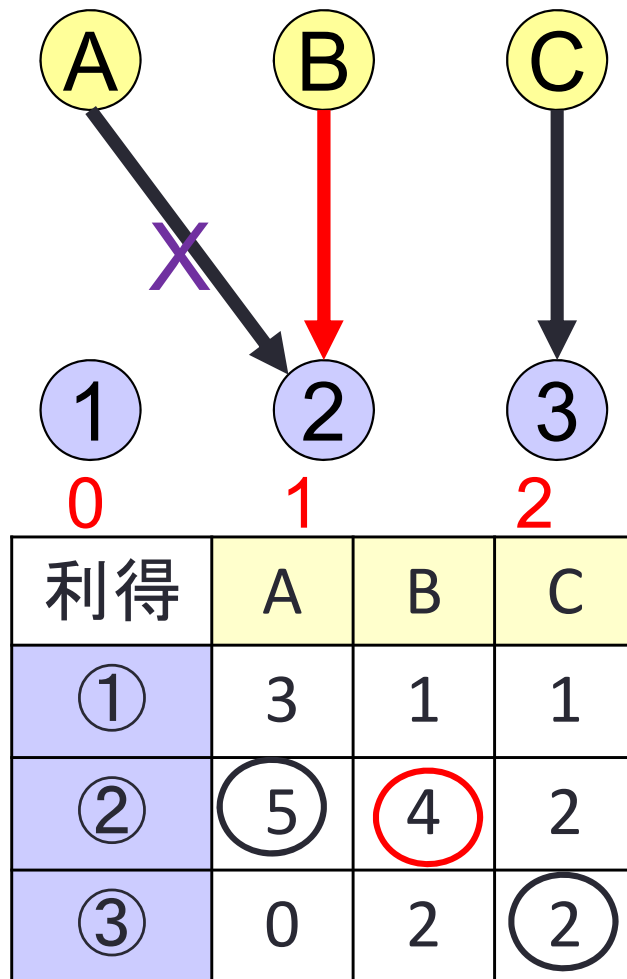
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	1	3	3

アルゴリズムの実行例(2)

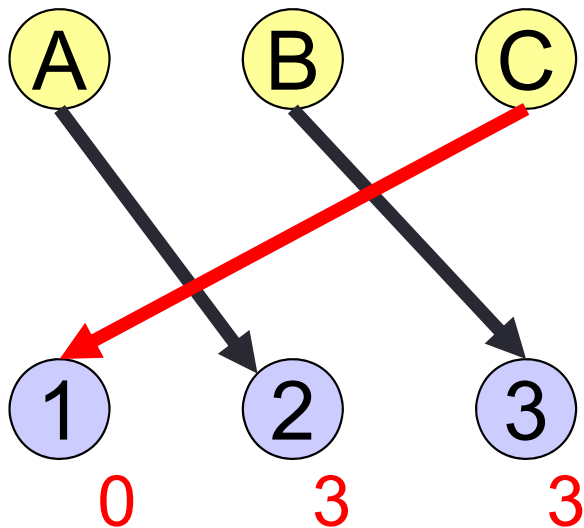
$\delta=1$ のとき



アルゴリズムの実行例(2)

$\delta=1$ のとき

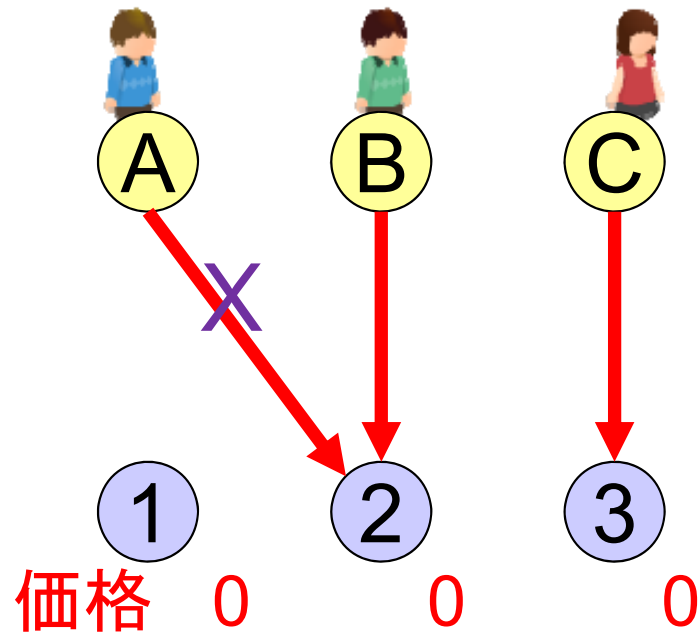
終了
均衡配分 ×
均衡価格 ○



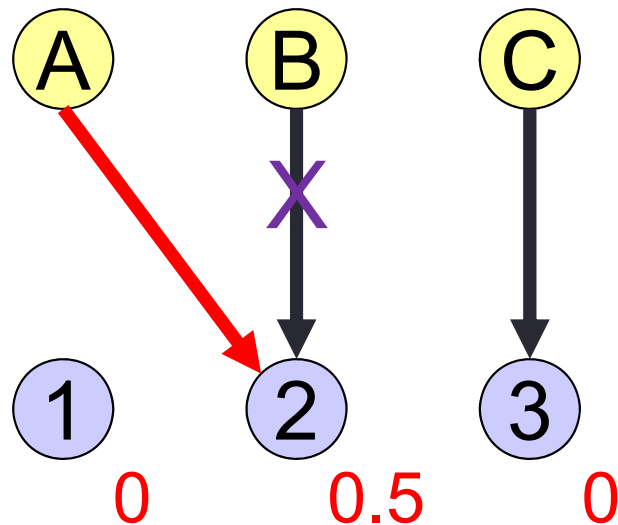
利得	A	B	C
①	3	1	①1
②	③3	2	0
③	-1	①1	1

アルゴリズムの実行例(3)

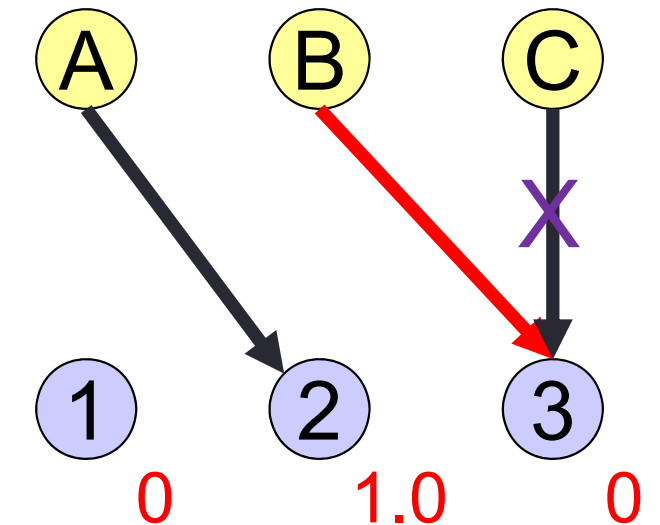
$\delta=0.5$ のとき



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4



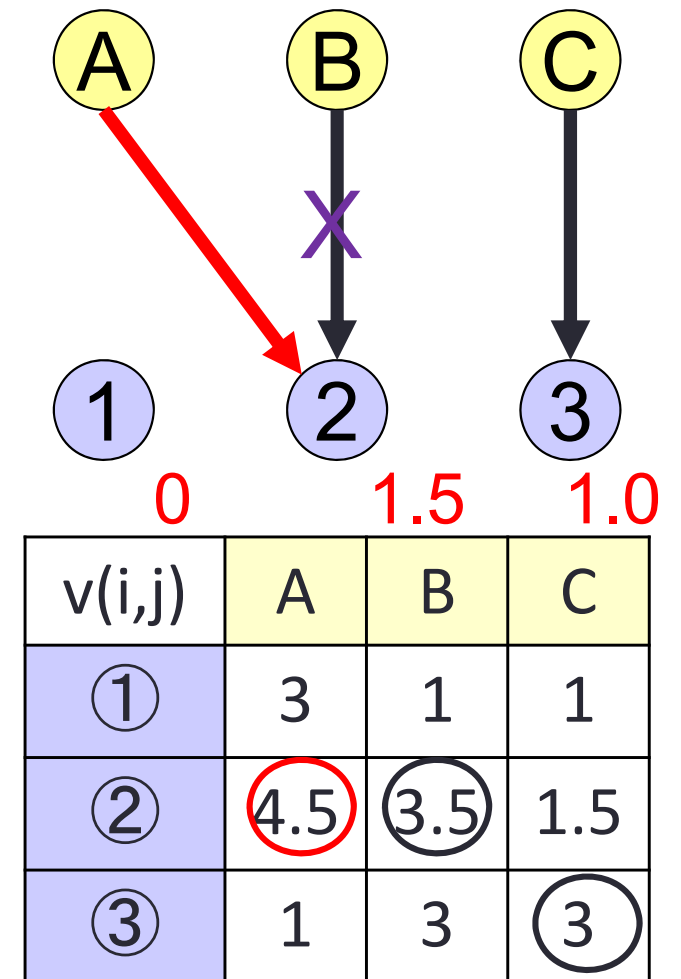
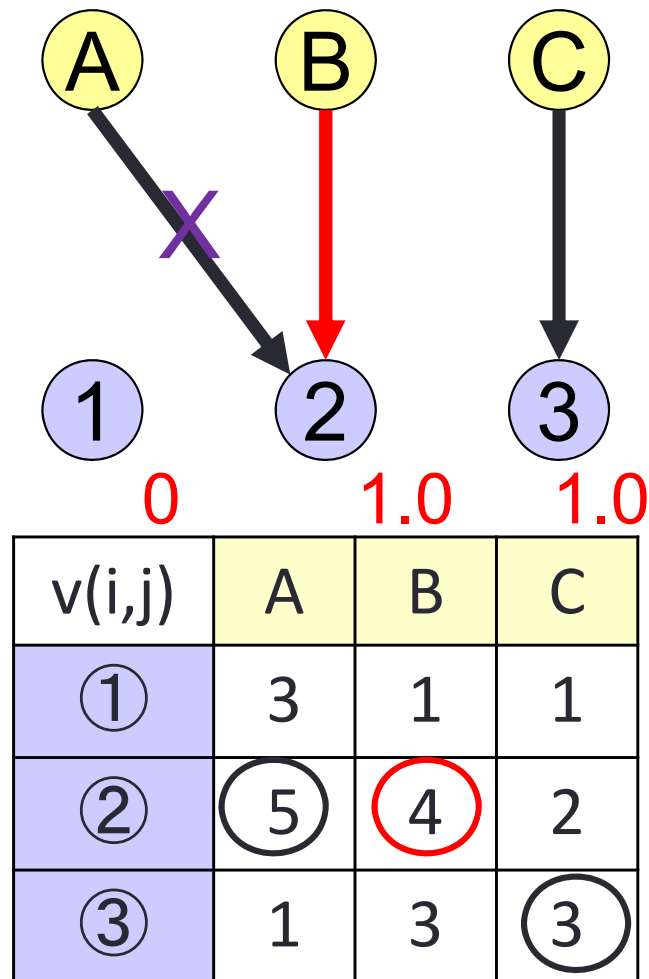
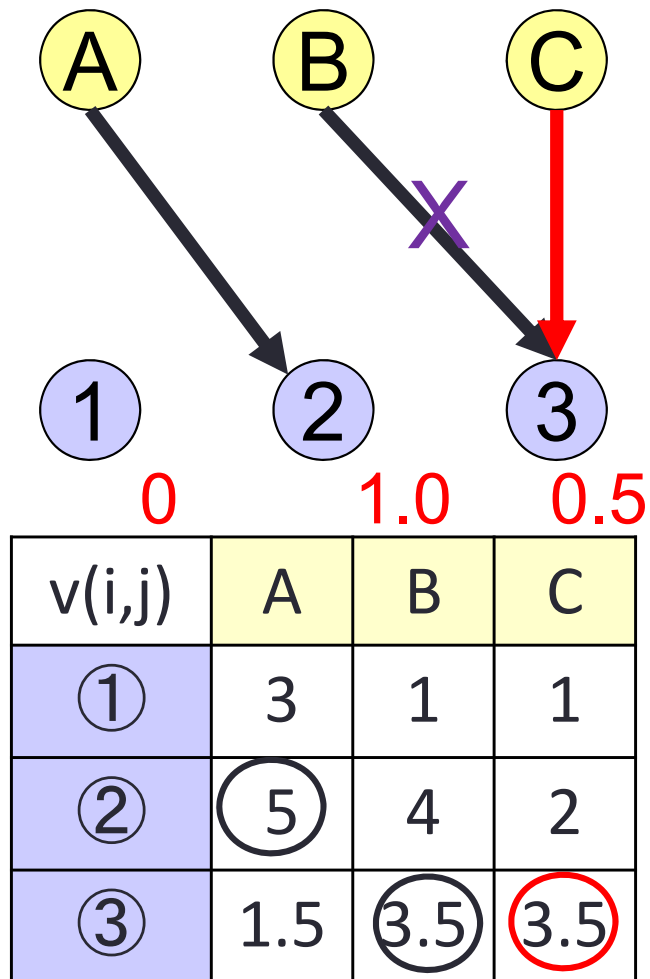
$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	5.5	4.5	2.5
③	2	4	4



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4

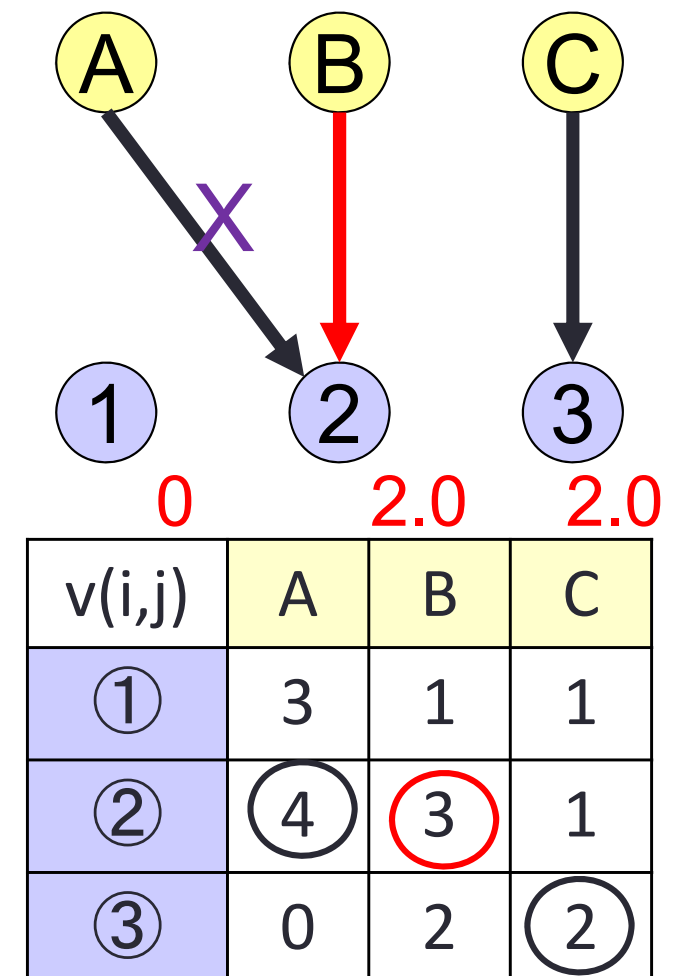
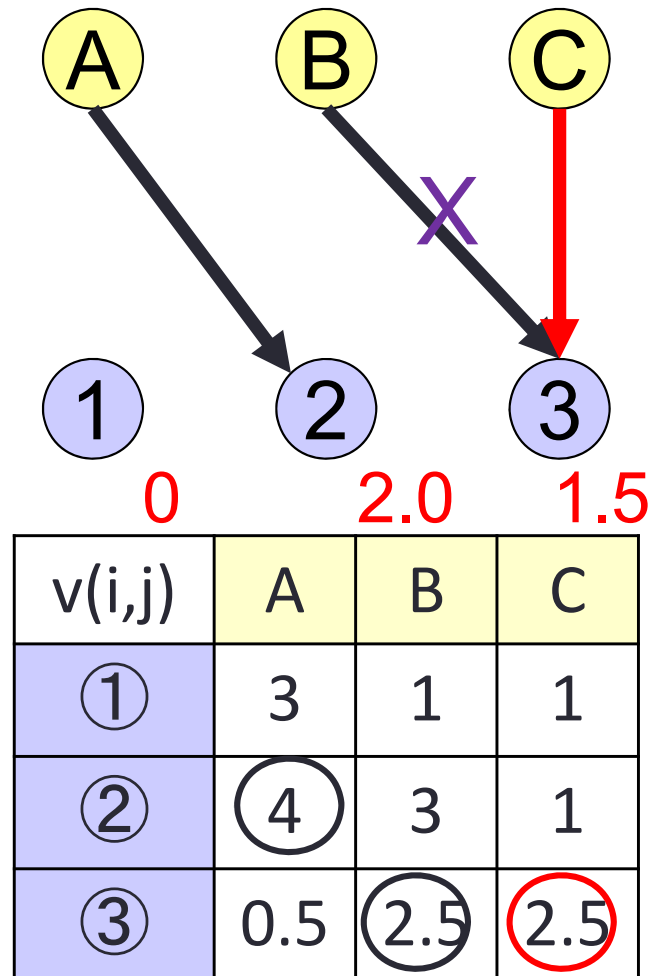
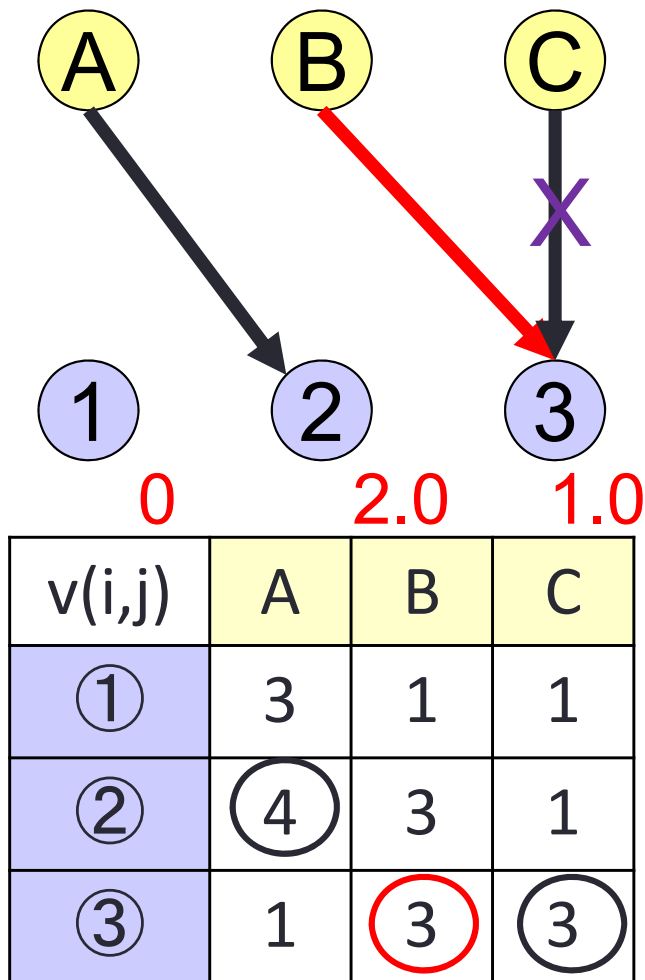
アルゴリズムの実行例(3)

$\delta=0.5$ のとき



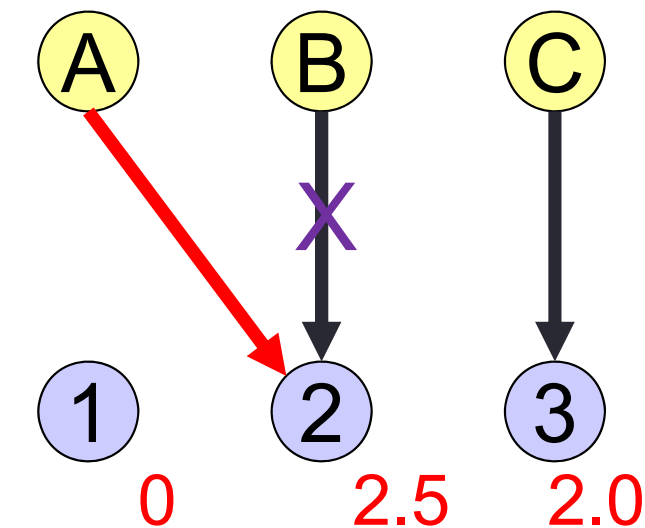
アルゴリズムの実行例(3)

$\delta=0.5$ のとき

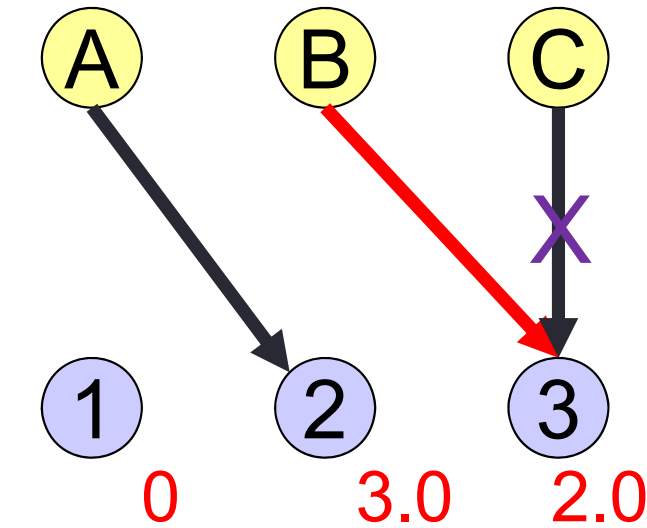


アルゴリズムの実行例(3)

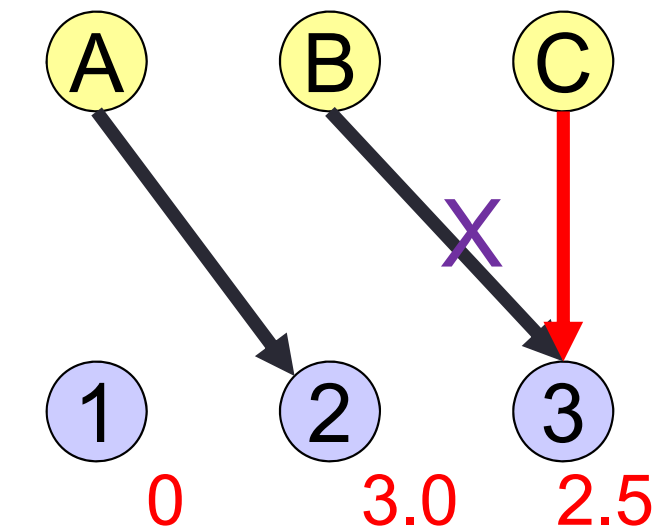
$\delta=0.5$ のとき



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	3.5	2.5	0.5
③	0	2	2



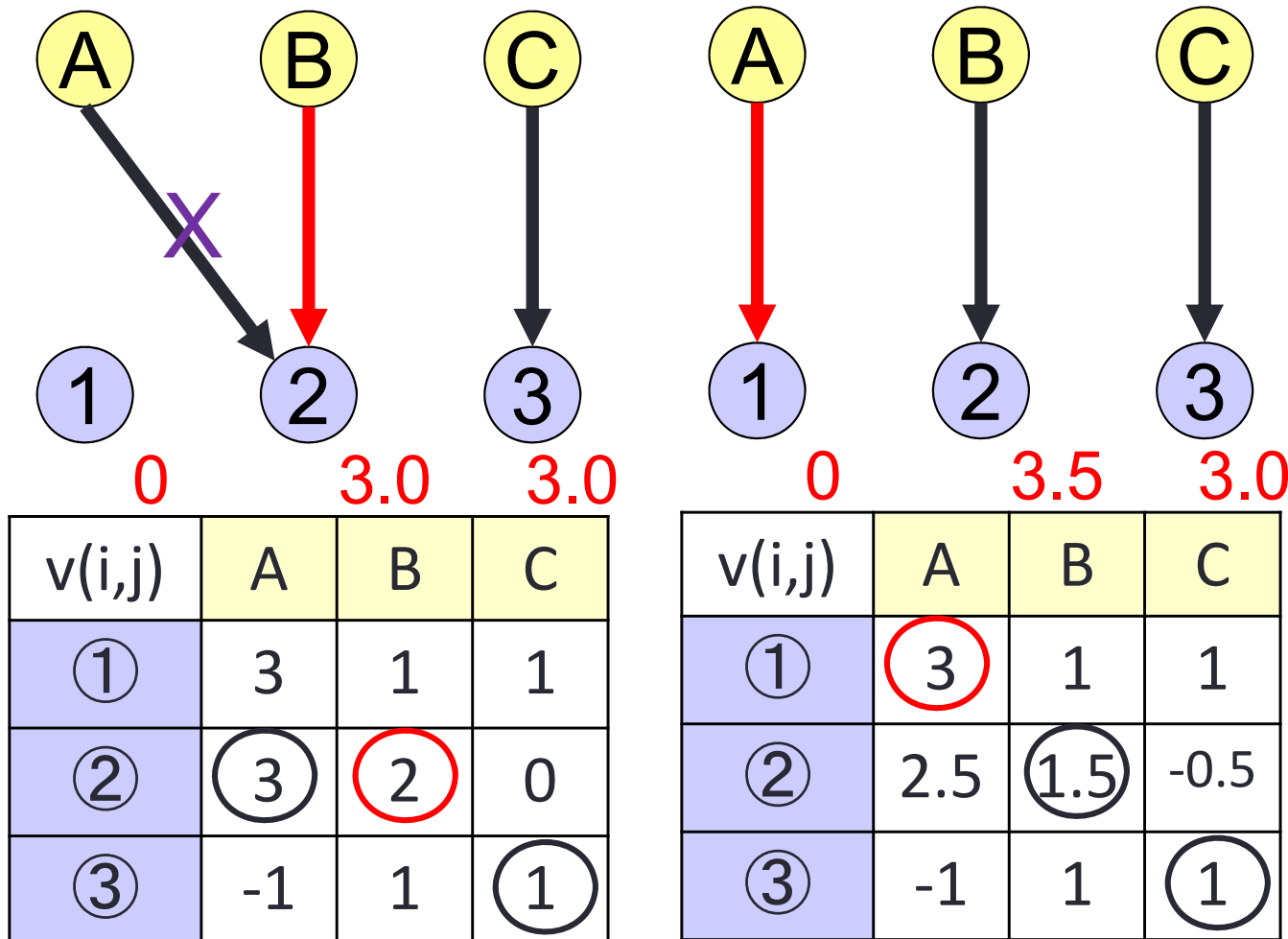
$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	0	2	2



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	-0.5	1.5	1.5

アルゴリズムの実行例(3)

$\delta=0.5$ のとき



終了
均衡配分○
均衡価格○

アルゴリズムの性能評価

定理1 アルゴリズムは有限回の反復後に終了する

得られたマッチングの重み $\doteq$ 最大重み

定理2 アルゴリズムにより得られたマッチング M に対し,
 M の重み $\geq$ 最大重みマッチングの重み $- \delta \min\{|B|, |N|\}$

得られた財の価格 $\doteq$ 均衡価格

定理3 アルゴリズムにより得られた財の価格 $p(j)$,
最小均衡価格 $p^*(j)$
 $\rightarrow |p(j) - p^*(j)| \leq \delta \min\{|B|, |N|\}$

厳密な均衡を得る

評価値 $v(i,j)$ がすべて整数

→ δ を調整して, 均衡配分, 均衡価格の厳密値を得ることが可能

定理2 アルゴリズムにより得られたマッチング M に対し,
 M の重み $\geq$ 最大重みマッチングの重み $- \delta \min\{|B|, |N|\}$

$\delta < 1/\min\{|B|, |N|\}$ とする

→ M の重み $>$ 最大重みマッチングの重み $- 1$

→ マッチングの重みは整数なので, M の重み $=$ 最大重み

定理3 アルゴリズムにより得られた財の価格 $p(j)$,
 最小均衡価格 $p^*(j)$ $\rightarrow |p(j) - p^*(j)| \leq \delta \min\{|B|, |N|\}$

$\delta < 1/2 \min\{|B|, |N|\}$ とする

→ $|p(j) - p^*(j)| < 0.5$

→ $p^*(j)$ は整数なので, $p(j)$ を最も近い整数に丸め $= p^*(j)$

定理1の証明

定理1 アルゴリズムは有限回の反復後に終了する

[証明]

- 各財の価格：初期値=0
 - アルゴリズムの各反復：
 - ある財 j の価格 $p(j)$ が δ 増加 ($\rightarrow v(i,j)-p(j)$ が δ 減少)
 - すべての入札者 i に対し $v(i,j)-p(j) < 0$
 - $\rightarrow$ 財 j の価格は今後変化しない
- $\therefore$ 財 j の価格 $p(j)$ の増加回数 $\leq v(i,j) / \delta$

定理2の証明: 準備

定義: 入札者 i は δ -happy $\iff$ 条件 (a) or (b) を満たす

(a) [利得が「ほぼ」最大の財が割当]

i に財 j が割り当てられていて,

$$\text{かつ } v(i, j) - p(j) \geq \max_{0 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} - \delta$$

(b) [最大利得が非正]

$$i \text{ に財の割当なし, かつ } \max_{0 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$$

命題:

(i) 均衡 $\rightarrow$ すべての入札者は 0-happy

($\because$ 定義からすぐにわかる)

(ii) ステップ3で入札者 i に財 j が割り当て

$\rightarrow i$ は δ -happy (財 j が他の入札者に奪われるまで)

($\because$ 財 j を選んだ時点では, 最大利得 $\rightarrow$ 直後に価格が δ 減少.

他の入札者に奪われるまでは価格 $p(j)$ 不変)

(iii) アルゴリズム終了時には, 全員が δ -happy

($\because$ 財の割り当て有り $\rightarrow$ (ii) より (a) 成立, 無し $\rightarrow$ (b) 成立)

定理2の証明

定理2 アルゴリズムにより得られたマッチング M に対し,
 M の重み $\geq$ 最大重みマッチングの重み $- \delta \min\{|B|, |N|\}$

[証明]

アルゴリズム終了時, 全ての入札者は δ -happy ($\because$ 命題(iii))

$\alpha(i)$ =アルゴリズム終了時の入札者 i への割り当て

$\alpha^*(i)$ =最大重みマッチングでの入札者 i への割り当て

$\rightarrow \alpha(i) \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned} v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i)) &\geq \max_{0 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} - \delta \\ &\geq v(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) - \delta \end{aligned}$$

$\alpha(i) = 0$ ならば

$$\begin{aligned} v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i)) = 0 &\geq \max_{0 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \\ &\geq v(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) \end{aligned}$$

定理2の証明

$$\begin{aligned} \text{よって } \sum_{i \in B} [v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i))] \\ \geq \sum_{i \in B} [v(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i))] - \min\{|B|, |N|\} \delta \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

アルゴリズムの途中で価格 >0 の財

→ 終了時まで常に誰かに割り当てられる

∴ アルゴリズム終了時に割り当てなしの財 j : $p(j)=0$

$$\begin{aligned} \therefore \text{左辺} &= \sum_{i \in B} v(i, \alpha(i)) - \sum_{i \in B} p(\alpha(i)) \\ &= \sum_{i \in B} v(i, \alpha(i)) - \sum_{j \in N} p(j) \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺第1項} &= \sum_{i \in B} v(i, \alpha^*(i)) - \sum_{i \in B} p(\alpha^*(i)) \\ &\geq \sum_{i \in B} v(i, \alpha^*(i)) - \sum_{j \in N} p(j) \quad \textcircled{3} \end{aligned}$$

定理2の証明

①, ②, ③より

$$\sum_{i \in B} v(i, \alpha(i)) \geq \sum_{i \in B} v(i, \alpha(i^*)) - \min\{|B|, |N|\} \delta$$

アルゴリズムの
求めたマッチング
の重み

最大重み
マッチングの重み

証明終わり

演習問題

下記のように評価値が与えられたとき, $\delta=1$ として, 均衡を近似的に計算するアルゴリズムを適用して 均衡の近似解を計算せよ. 計算の過程も書くこと.

問1

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

問3

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

問2

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

それぞれの極小均衡価格以下の通り

問1 : $p(1)=2, p(2)=6$

問2 : $p(1)=0, p(2)=4, p(3)=5$

問3 : $p(1)=0, p(2)=3, p(3)=4, p(4)=0$