数理経済学特講

複数財に対するオークションの数理とアルゴリズム

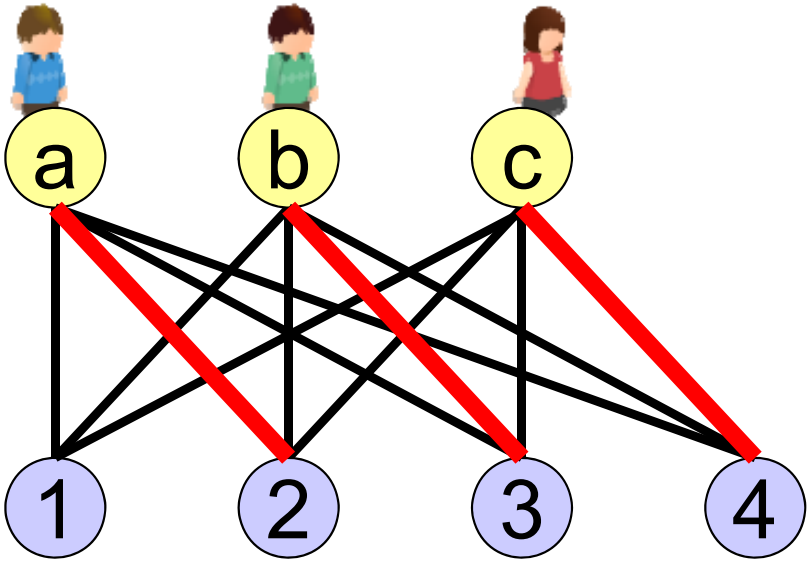
第7回　最大重みマッチング

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題

- 各入札者の各財への評価値 v(i,j)が与えられている状況で
  入札者に割り当てられた財の評価値の合計を最大化したい



v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

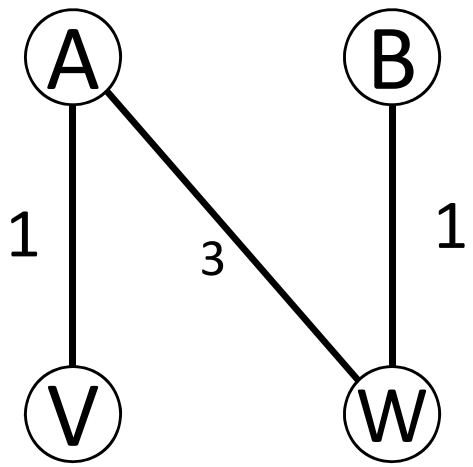
- 最大重みマッチング問題:
  枝に重みが与えられたグラフにおいて,
  枝重みの和が最大のマッチングを求める

最大重みkマッチング問題の定義

最大重みkマッチング問題

- 入力: 二部グラフ G=(V,E) (頂点集合 V, 枝集合 E),
  各枝 (u,v) の重み w(u,v)
  正整数 k
- 出力: 枝数＝k のマッチングの中で枝重みの和が最大のもの
  (最大重みkマッチング)

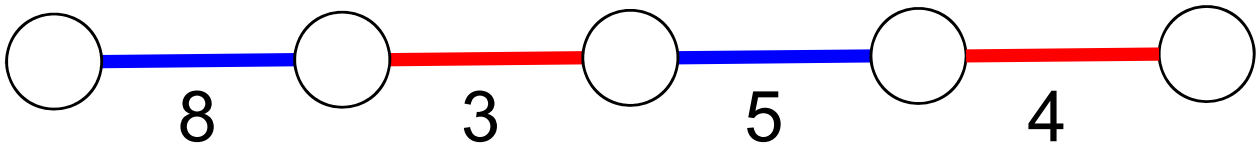
例: 最大重み1マッチングは
{(A,W)}, 重み3
最大重み2マッチングは
{(A,V), (B, W)}, 重み2



最大重みマッチングと交互路

交互路・交互閉路による マッチングの更新

定義：マッチング Mに関する交互路（交互閉路）Pの重み
＝ $P \setminus M$ の枝重みの和 ー P∩Mの枝重みの和



交互路の重み
＝8-3+5-4=6

命題 M：マッチング，P：（Mに関する）交互路
←→Pを使ってMの枝を入れ替えて得られる
マッチング $(M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ の重み ＝ M の重み + P の重み

命題　正の重みの交互路（交互閉路）が存在
→現在のマッチングMは最大重みではない
（対偶：マッチングMは最大重みマッチング
→正の重みの交互路（交互閉路）は存在しない）

最大重みマッチングの最適性条件：交互路を用いた条件

命題　正の重みの交互路（交互閉路）が存在
➔現在のマッチングMは最大重みではない
（対偶：マッチングMは最大重みマッチング
➔正重みの交互路（交互閉路）は存在しない）

逆も成り立つ

命題　正の重みの交互路（交互閉路）が存在
🡐現在のマッチングMは最大重みではない
（対偶：マッチングMは最大重みマッチング
🡐正重みの交互路（交互閉路）は存在しない）

マッチングが最適解であるための必要十分条件

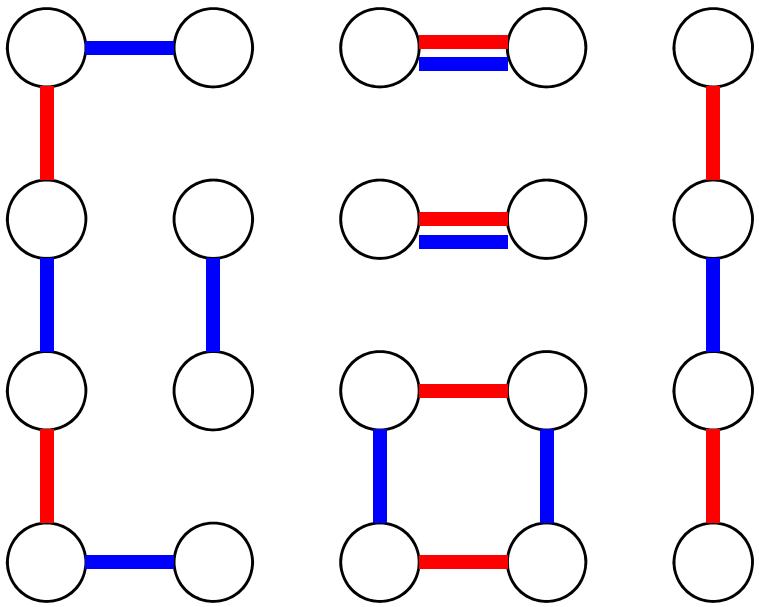
定理： マッチング M は最大重みマッチング
🡐➔正重みの交互路および交互閉路は存在しない

交互路による最適性条件：証明

最大重みマッチングではない➔正の重みの交互路（閉路）が必ず存在

命題　正の重みの交互路（交互閉路）が存在
　　🡐現在のマッチングMは最大重みではない

（証明）最大重みマッチングをM*とおく
枝集合$(M^* \setminus M) \cup (M \setminus M^*)$に注目
➔ 幾つかの（Mに関する）
　交互路・交互閉路からなる.
それらの重みの合計
　　$= M^* \setminus M$ の重み － $M \setminus M^*$ の重み
　　＝M*の重み － M の重み＞0
∴ 正の重みの交互路または交互閉路が
　必ずひとつは存在



最大重みマッチングのアルゴリズム

最大重み増加路を用いたアルゴリズム

ハンガリー法とよばれる

- 各反復で，重み最大の増加路を利用
- 高々 |V|/2回の反復で終了

アルゴリズム

ステップ0：$M_0 := \emptyset$，k=0 とする.

ステップ1：M_kに関する増加路が存在しない➔ 終了

ステップ2：M_kに関する最大重みの増加路 P をひとつ見つけ，
P を用いて M_k を更新（$M_{k+1} := (M_k \setminus P) \cup (P \setminus M_k)$）
k:=k+1 とおいてステップ1へ.

命題　各k=0,1,… に対し，M_kは最大重みkマッチング

求めた M_k の中で重み最大のマッチングが最大重みマッチング

アルゴリズムの正当性（その1）

命題　各k=0,1,… に対し，M_kは最大重みkマッチング

次の主張を示せばよい

- M_k: 最大重み k マッチング
- P: M_k に関する最大重みの増加路
- N: 最大重み k+1 マッチング

➔ $M_{k+1} := (M_k \setminus P) \cup (P \setminus M_k)$の重み ≧ N の重み

（➔M_{k+1} は最大重み k+1マッチング）

主張の証明:

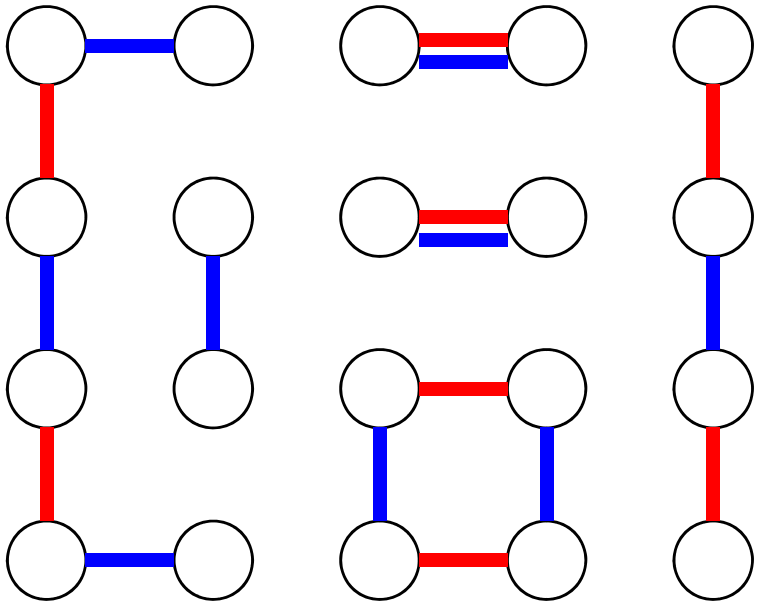
N --- 最大重み k+1 マッチング とする

アルゴリズムの正当性（その2）

- 枝集合 $(M_k \setminus N) \cup (N \setminus M_k)$ は M_k に関する増加路を1つ以上含む
  （∵ N の枝数 > M_k の枝数）
  そのうちのひとつを P′ とおく
- P′ の重み α ≦ P の重み（∵ P はM_k に関する最大重みの増加路）
- P′ は N に関する交互路（「減少路」）でもある

∴ $N' = (N \setminus P') \cup (P' \setminus N)$ は
　枝数 k のマッチング
　M_k の重み≧ N′の重み = N の重み − α

よって，
N の重み≦ M_k の重み + α
　　＝ M_{k+1} の重み



重み最大増加路の見つけ方：準備

- 増加路検出でつかった有向グラフを利用
- 有向枝に長さを与える → 最短路問題に帰着

長さ＝－（枝重み）

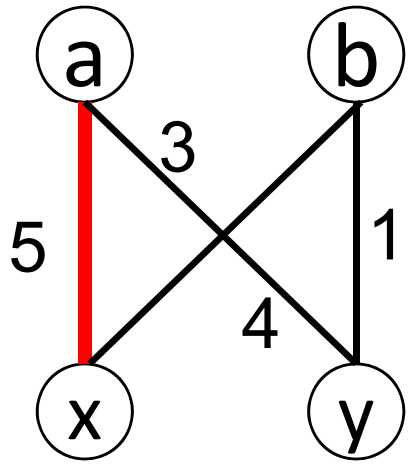
- 全ての枝を，B 側から N 側に向き付け
- マッチングMの各枝に対し，さらに
  逆向きの枝（N→B）を追加

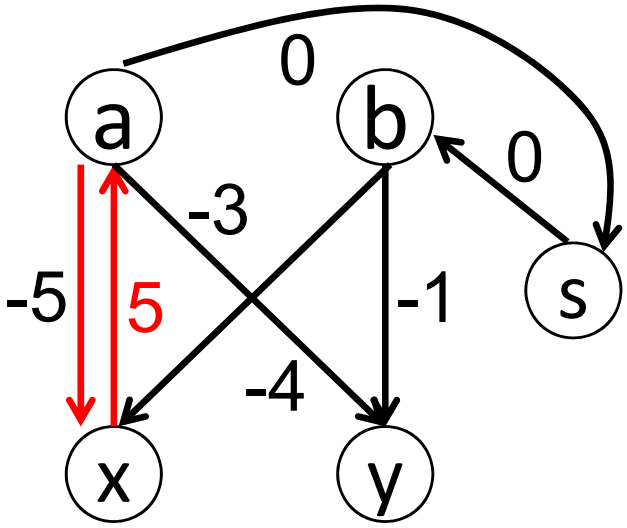
長さ＝枝重み

- B 側の各頂点 u に対し，

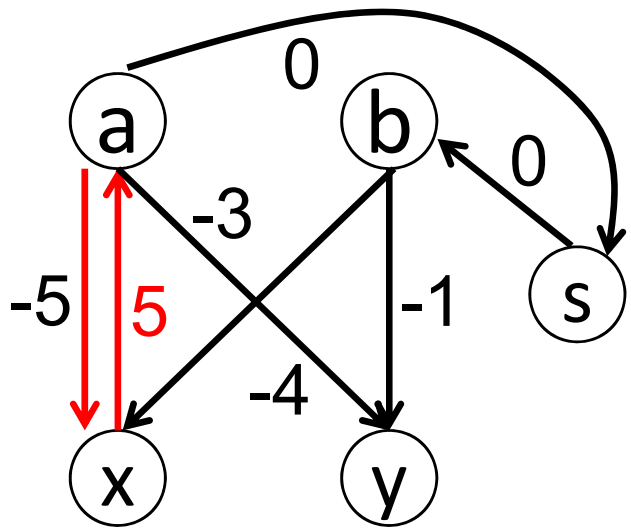
長さ＝0

  - 枝 (s,u) をおく
  - マッチング枝が接続➔枝 (u,s) を追加





最大重み増加路の見つけ方



- N’⊆N: N の頂点でマッチング M の枝が接続しないものすべて
- 有向グラフにおいて，
  頂点 s から N’ の頂点への有向路

⇔ 元の二部グラフの（Mに関する）増加路
その有向路の長さ ＝ 増加路の重み ×（－1）

∴有向グラフにおいて，上記のような有向路のうち，最短なものを求めればよい

注意：M が最大重み k マッチング
➔対応する有向グラフに負閉路は存在しない
（∵頂点 s を通らない有向閉路は交互閉路に対応）
∴ 最短路は存在

双対変数を用いた最適性条件

双対問題の定式化

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

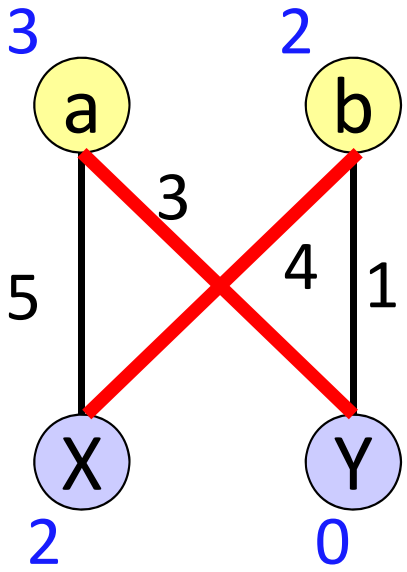
条件 $q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

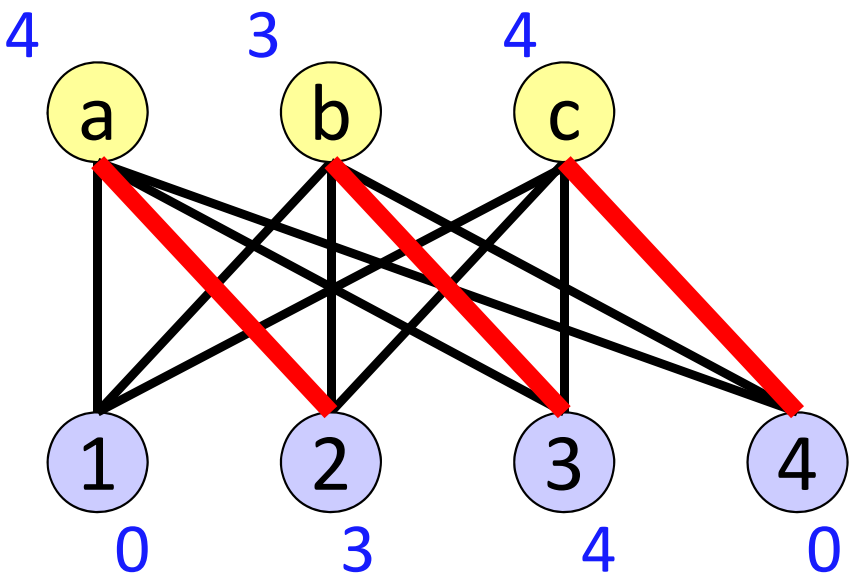
$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

双対変数を用いた最適性条件

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み
⟷ 次の条件を満たす非負実数 q(i) (i∈B), p(j) (j∈N) が存在
任意の枝 (i,j) に対し， q(i)+p(j) ≧ v(i,j)
マッチング Mに含まれる任意の枝に対し，q(i)+p(j) = v(i,j)
i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0
j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0





v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

必要性の証明（その１）

補題1：二部グラフのマッチング M は最大重み
← 次の条件を満たす非負実数 q(i) (i∈B), p(j) (j∈N) が存在
①任意の枝 (i,j) に対し， q(i)+p(j) ≧ v(i,j)
②マッチング M に含まれる任意の枝に対し，q(i)+p(j) = v(i,j)
③ i∈Bにマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0
④ j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0

［補題1の証明］
「任意のマッチング T の重み $\geqq \sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j) =$ M の重み」を示す

必要性の証明（その２）

[不等号の証明]
B_M=マッチングMの枝が接続しているBの頂点
N_M=マッチングMの枝が接続しているNの頂点
➔ 条件②，③より，
マッチング M の重み = $\sum_{(i,j)\in M} v(i,j)$

$$= \sum_{i\in B_M} q(i) + \sum_{j\in N_M} p(j) = \sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j)$$

[等号の証明]
B_T=マッチングTの枝が接続しているBの頂点
N_T=マッチングTの枝が接続しているNの頂点
➔ 条件①と q(i), p(j) の非負性より，
マッチング T の重み = $\sum_{(i,j)\in T} v(i,j)$

$$\leq \sum_{i\in B_T} q(i) + \sum_{j\in N_T} p(j) \leq \sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j)$$

［補題1の証明終わり］

十分性の証明

補題2: 二部グラフのマッチング M は最大重み
➔ 次の条件を満たす非負実数 q(i) (i∈B), p(j) (j∈N) が存在
任意の枝 (i,j) に対し， q(i)+p(j) ≧ v(i,j)
マッチング M に含まれる任意の枝に対し，q(i)+p(j) = v(i,j)
i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0
j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0

[補題2の証明]　２通りの証明

（1）[組合せ的，グラフ論的]

以下の定理に基づき，ある有向グラフのポテンシャルが所望の条件を満たすことを示す

定理: マッチング M は最大重みマッチング
🡐➔正の重みの交互路および交互閉路は存在しない

（2）[代数的] 線形計画の双対性を利用
相補性条件より，双対最適解が所望の条件を満たすことを示す

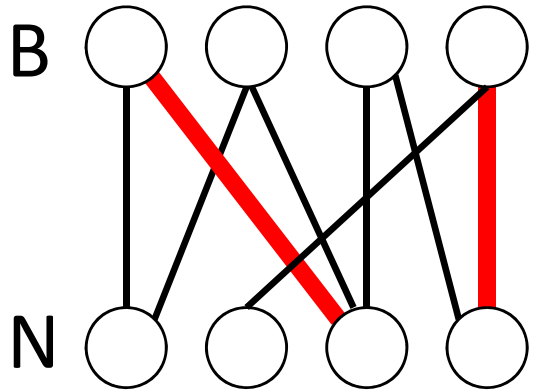
最大重みマッチングの最適性条件：証明

補題2：二部グラフのマッチング M は最大重み
➔ 次の条件を満たす非負実数 q(i) (i∈B), p(j) (j∈N) が存在
任意の枝 (i,j) に対し， q(i)+p(j) ≧ v(i,j)
マッチング M に含まれる任意の枝に対し，q(i)+p(j) = v(i,j)
i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0
j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0

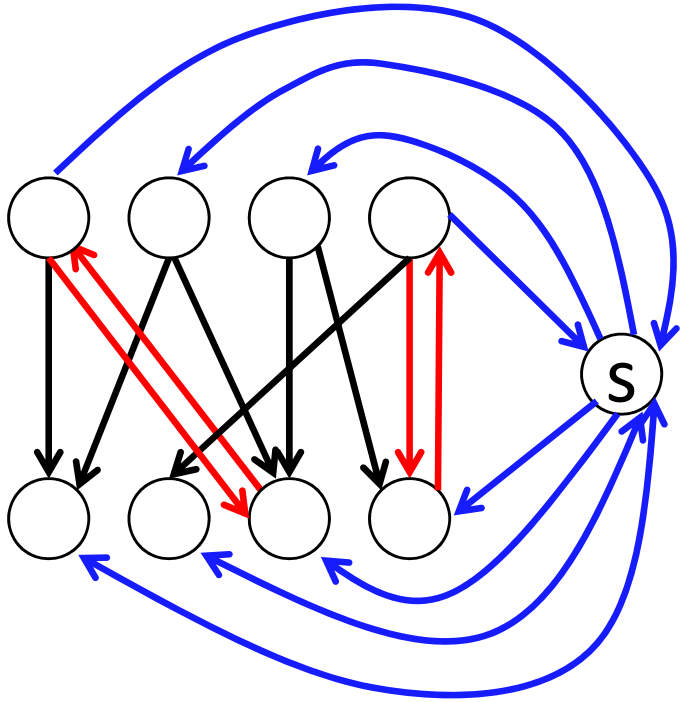
［補題2の第2の証明］
上記の等式・不等式系に解が存在することを示せばよい
← 有向グラフを作成，ポテンシャルが存在することを利用
その際，以前示した下記の定理を利用

有向グラフを使った証明（その1）

有向グラフの作り方



- 全ての枝を，B 側から N 側に向き付け
- マッチングMの各枝に対し，さらに
  逆向きの枝（N→B）を追加
- 新たな頂点 s をおく
- B 側の各頂点 u に対し，
  - マッチング枝が接続➔枝 (u,s) をおく
    接続なし➔ (s,u)をおく
- N 側の各頂点 v に対し，
  - マッチング枝が接続➔枝 (s,v) をおく
    接続なし➔ (s,v), (v,s)をおく



有向グラフを使った証明（その2）

- 有向枝に長さを与える → 最短路問題に帰着

長さ＝－（枝重み）

- 全ての枝を，B 側から N 側に向き付け
- マッチングMの各枝に対し，さらに

逆向きの枝（N→B）を追加

長さ＝枝重み

- B 側の各頂点 u に対し，

長さ＝0

  - マッチング枝が接続➔枝 (u,s) をおく

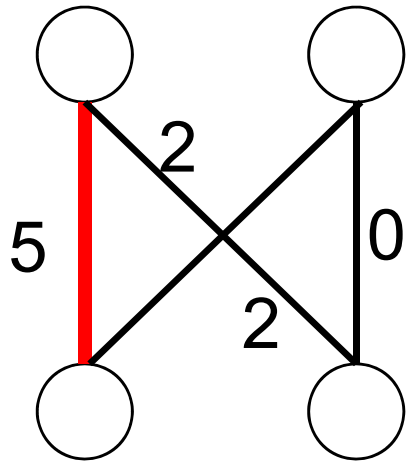
    接続なし➔ (s,u)をおく

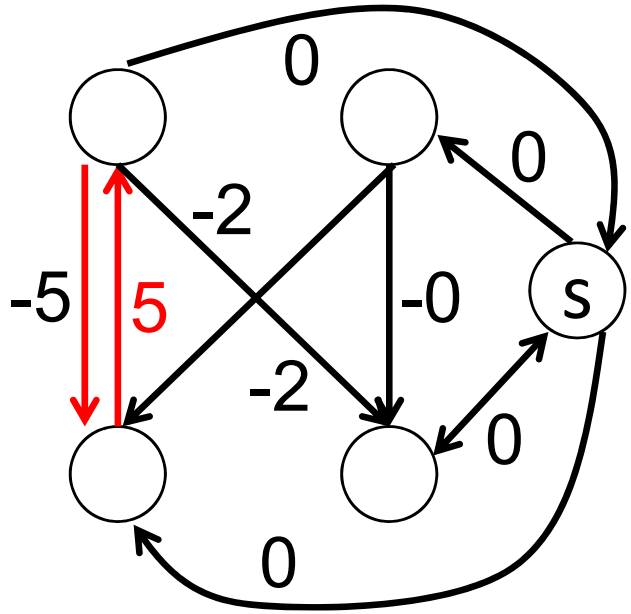
- N 側の各頂点 v に対し，

長さ＝0

  - マッチング枝が接続➔枝 (s,v) をおく

    接続なし➔ (s,v), (v,s)をおく





有向グラフを使った証明（その3）

有向グラフの有向閉路（のほぼ全て）は，二部グラフの交互路と対応

(1) 頂点 s → B 側の頂点 → … → N 側の頂点→頂点 s の形の有向閉路

⬅➡ 元の二部グラフの増加路（タイプ1）

(2) 頂点 s → N 側の頂点 → … → B 側の頂点→頂点 s の形の有向閉路

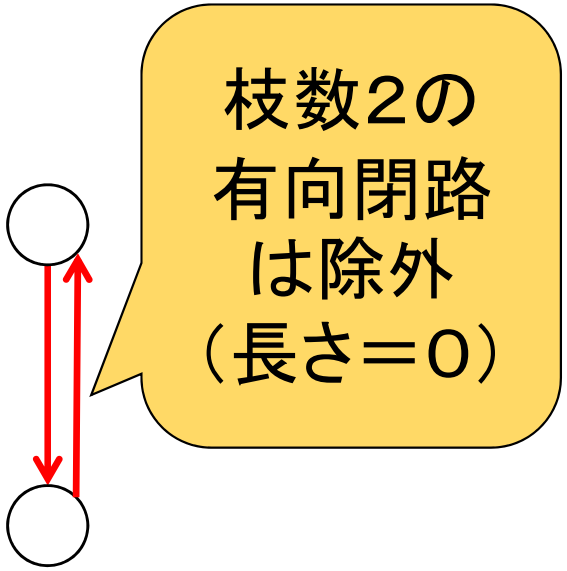
⬅➡ 元の二部グラフの「減少路」（タイプ2）

(3) 上記以外で，頂点 s を通過する有向閉路

⬅➡ 元の二部グラフのタイプ3の交互路

(4) 頂点 s を通過しない（枝数4以上の）有向閉路

⬅➡ 元の二部グラフの交互閉路



いずれの場合も，
有向閉路の長さ＝交互（閉）路の重み×（－1）

∴ 重み>0 の交互路，交互閉路が存在しない

➡ 有向グラフに負閉路が存在しない

有向グラフを使った証明（その4）

- s から各頂点 v への最短路が存在
  その長さ = d(v) ➔ ポテンシャルなので，以下の不等式が成立

長さ＝－（枝重み）

- 全ての枝を，B 側から N 側に向き付け
- マッチングMの各枝に対し，さらに
  逆向きの枝（N→B）を追加

枝(i,j), i∈B,j∈N
→d(j)-d(i)≦-v(i,j)
さらに(i,j)∈M
→d(i)-d(j)≦v(i,j)

長さ＝枝重み

長さ＝0

- B 側の各頂点 i に対し，
  - マッチング枝が接続➔枝 (i,s) をおく
    接続なし➔ (s,i)をおく

d(s)-d(i)≦0

d(i)-d(s)≦0

長さ＝0

- N 側の各頂点 v に対し，
  - マッチング枝が接続➔枝 (s,v) をおく
    接続なし➔ (s,v),(v,s)をおく

d(v)-d(s)≦0

d(s)-d(v)≦0
d(v)-d(s)≦0

有向グラフを使った証明（その5）

d(v)= s から各頂点 v への最短路長

➔ さらに以下の等式が成立

- s を通過する負閉路が存在しない ➔ d(s) = 0
- マッチング枝が接続しない B 側の頂点 i に対し，
  入る枝は (s,i) のみ ➔ d(i) = 0

以上，まとめると

- 任意の枝(i,j), i∈B,j∈N ➔ d(j)-d(i)≦ - v(i,j)
- さらに(i,j)∈M ➔ d(j)-d(i)＝ - v(i,j)
- i∈B にマッチング M の枝が接続している ➔ d(i)≧0
- i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ d(i)=0
- j∈N にマッチング M の枝が接続している ➔ d(j)≦0
- j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ d(j)=0

∴ 各 i∈B に対し q(i)=d(i)，　各j∈N に対し p(j)= - d(j) とおくと
補題の条件を満たす（証明終わり）

枝重みが整数値の場合の最適性条件

枝重みが整数の場合，より強い結果

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み
⟷ 次の条件を満たす非負実数 $q(i)$ $(i \in B)$, $p(j)$ $(j \in N)$ が存在
任意の枝 (i,j) に対し， $q(i)+p(j) \geqq v(i,j)$
マッチング Mに含まれる任意の枝に対し， $q(i)+p(j) = v(i,j)$
$i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない ➔ $q(i)=0$
$j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない ➔ $p(j)=0$
さらに，枝重みがすべて整数ならば，
上記の条件を満たす $q(i)$, $p(j)$ として整数値のものが存在する

[証明] 枝重みが整数 → 有向グラフの枝長が整数
→ 最短路長が整数
→ 証明における $q(i)$, $p(j)$ の決め方より，
$q(i)$, $p(j)$ として整数が選べる

双対性を用いた証明（1）

- 最大重みマッチング問題を，整数計画問題として定式化
  （E = 二部グラフの枝すべての集合）

最大化　$\sum_{(i,j)\in E} v(i,j)x_{ij}$

条件　$\sum_{k\in N:\,(i,k)\in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$\sum_{k\in B:\,(k,j)\in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$

$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall (i,j) \in E)$

この問題の最適解 ←→ 最大重みマッチング

双対性を用いた証明（2）

$x_{ij} \in \{0,1\}$ を不等式条件 $x_{ij} \geq 0$ に緩める

→ 線形計画問題へ

最大化 $\sum_{(i,j)\in E} v(i,j)x_{ij}$

条件 $\sum_{k\in N:\,(i,k)\in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$\sum_{k\in B:\,(k,j)\in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$

$x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$

- 任意の許容解は $x_{ij} \leq 1$ を満たす
- 最適解x_{ij}^*は 0 or 1 とは限らない

0 or 1 ➔ 元の整数計画問題の最適解

➔ 最大重みマッチングに対応

証明は後で

定理： 前のスライドの整数計画問題の最適解は，
上記の線形計画問題の最適解

双対性を用いた証明（3）

線形計画問題

最大化　$\sum_{(i,j)\in E} v(i,j)x_{ij}$

条件　$\sum_{k\in N:\,(i,k)\in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$\sum_{k\in B:\,(k,j)\in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$

$x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$

その双対問題（＝最大重みマッチングの双対）

最小化　$\sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j)$

条件　$q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall (i,j) \in E)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

双対性を用いた証明(4)

線形計画問題に対する相補性定理を適用して，以下が得られる

定理: 線形計画問題の主問題の許容解 x_{ij} は最適解
←→ 以下の条件を満たす，双対問題の解が存在

$$\left.\begin{array}{l} q(i)+p(j) \geq v(i,j) \ \ (\forall (i,j) \in E) \\ q(i) \geq 0 \ \ (\forall i \in B), \ \ p(j) \geq 0 \ \ (\forall j \in N) \end{array}\right\} \text{双対問題の許容解}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij} > 0 \text{ ならば } q(i)+p(j) = v(i,j) \ \ (\forall (i,j) \in E) \\ \sum_{k \in N:\,(i,k) \in E} x_{ik} < 1 \text{ ならば } q(i) = 0 \ \ (\forall i \in B) \\ \sum_{k \in B:\,(k,j) \in E} x_{kj} < 1 \text{ ならば } p(j) = 0 (\forall j \in N) \end{array}\right\} \text{相補性条件}$$

主問題の許容解 x_{ij} がマッチングに対応する場合，
相補性条件は下記のように書き換えられる

(i,j)はマッチングの枝 ➔ $q(i)+p(j) = v(i,j)$
$i \in B$ にマッチングの枝が接続しない ➔ $q(i) = 0$
$j \in N$ にマッチングの枝が接続しない ➔ $p(i) = 0$

双対性を用いた証明（5）

最大重みマッチングに対応する主問題の解 x_{ij}^* は最適解

∴ 前の定理は以下のように書き換えられる（証明終わり）

定理： マッチングに対応する許容解 x_{ij} は最適解（最大重み）

←→ 以下の条件を満たす，双対問題の解が存在

$q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall (i,j) \in E)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

(i,j)はマッチングの枝 → $q(i) + p(j) = v(i,j)$

$i \in B$ にマッチングの枝が接続しない → $q(i) = 0$

$j \in N$ にマッチングの枝が接続しない → $p(i) = 0$

整数最適解の存在性（その1）

定理: 下記の線形計画問題には整数最適解が存在する

最大化 $\sum_{(i,j)\in E} v(i,j)x_{ij}$

条件 $\sum_{k\in N:\,(i,k)\in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$\sum_{k\in B:\,(k,j)\in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$

$x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$

証明: $E' = \{(i,j) \in E | x_{ij} > 0\}$ とおく. |E'| に関する帰納法を使う.

ケース1: 各頂点に接続する E' の枝が高々1つ ➔ E' はマッチング

➔ x の最適性より, $x_{ij} = 1\ (\forall (i,j) \in E')$ に

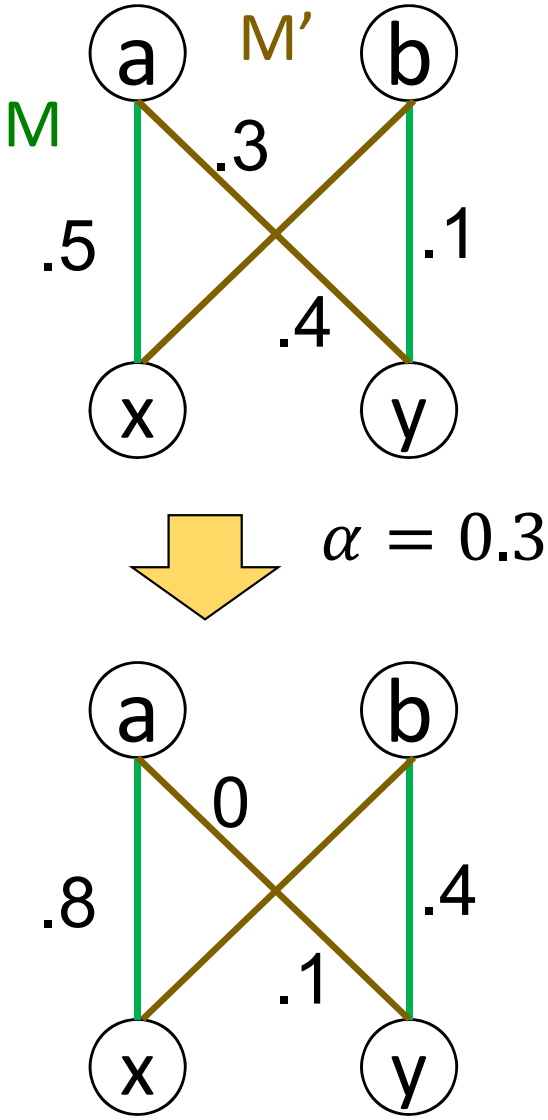
変更しても最適解のまま.

ケース2: ある頂点に接続する E' の枝が2つ以上

➔ E' は枝数2以上の閉路または路を含む

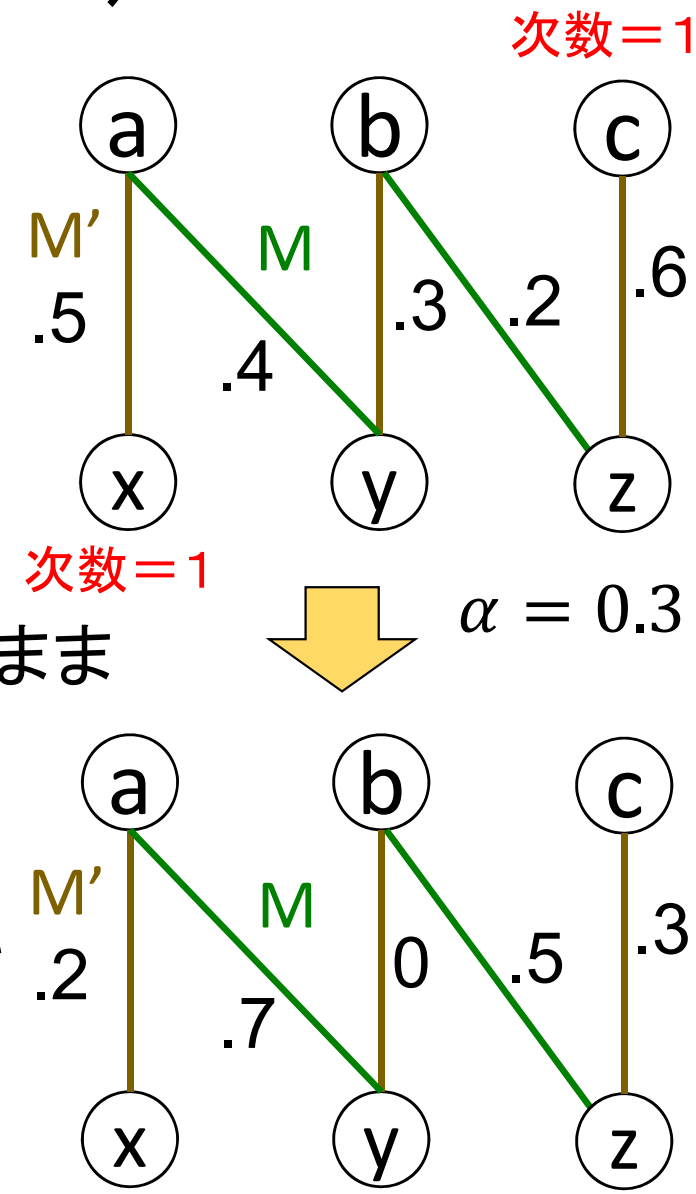
整数最適解の存在性（その2）

- ケース2-1：E’ は閉路Cを含む
  - C は2つのマッチング M, M’ に分解可
    M の重み≧ M’ の重み　と仮定
  - $\alpha = \min\{x_{ij} \mid (i,j) \in M'\}\ (> 0)$ に対し，
    解 x を以下のように修正しても，最適解のまま
    $$x_{ij} := x_{ij} + \alpha \quad \big((i,j) \in M\big),$$
    $$x_{ij} := x_{ij} - \alpha \quad \big((i,j) \in M'\big)$$
    （∵各頂点での制約は満たされたまま.
    目的関数値の変化量
    ＝ α×M の重み － α×M’ の重み ≧0）
  - この修正の結果，|E’| の値が1以上小さい
    最適解を得られた
    ➔ 帰納法の仮定より，主張が成立



整数最適解の存在性（その3）

- ケース2-2：E’ は閉路を含まない
  - 極大な路 P をひとつ選ぶ
    ➔ 両端点の次数＝1
  - P は2つのマッチング M, M’ に分解可
    M の重み≧ M’ の重み　と仮定
  - $\alpha = \min\{x_{ij} \mid (i,j) \in M'\}\ (> 0)$ に対し，
    解 x を以下のように修正しても，最適解のまま

$$x_{ij} := x_{ij} + \alpha \quad ((i,j) \in M),$$
$$x_{ij} := x_{ij} - \alpha \quad ((i,j) \in M')$$

  - この修正の結果，|E’| の値が1以上小さい
    最適解を得られた
    ➔ 帰納法の仮定より，主張が成立