数理経済学特講

複数財に対するオークションの数理とアルゴリズム

第5回　二部グラフのマッチング問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

最短路問題に関する講義の補足

応用：均衡配分の判定（その1）

- 複数不可分財のオークションにおいて，
  与えられた財の配分が均衡配分か否かを判定

定義：財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は 均衡配分
⇔ 以下の条件を満たす財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在

- 入札者 i に財 j が割り当てられる（$\alpha(i) = j$）
  ➔ $0 \leq v(i,j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない（$\alpha(i) = 0$）
  ➔ $\max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

応用: 均衡配分の判定(その2)

定義: 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は 均衡配分

⟷ 以下の条件を満たす財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在

条件を差分不等式系として書き換え

- 入札者 i に財 j が割り当てられる

➔ $v(i,j) - p(j) \geq 0, v(i,j) - p(j) \geq v(i,h) - p(h)\ (\forall h \in N)$

- 入札者 i に財の割り当てがない

➔ $v(i,h) - p(h) \leq 0\ (\forall h \in N)$

- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

(a) 条件を満たす価格が存在する ➔ 与えられた配分は均衡配分

(b) しない➔ 均衡配分ではない

(a) の場合: 最短路問題を解いて均衡価格の計算が可能

(b) の場合: 対応する最短路問題に負閉路が存在

→ 負閉路に対応する不等式を満たす解なし

応用: 均衡価格の計算

均衡配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が既知のとき,
均衡価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ を求めたい

均衡価格の条件:差分不等式系

- 入札者 i に財 j が割り当てられる

➔ $v(i,j) - p(j) \geq 0, v(i,j) - p(j) \geq v(i,h) - p(h)\ (\forall h \in N)$

- 入札者 i に財の割り当てがない

➔ $v(i,h) - p(h) \leq 0\ (\forall h \in N)$

- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

差分不等式系には必ず解が存在
→ 対応する最短路問題を解いて均衡価格の計算が可能

前回の講義の補足

応用：均衡価格の判定（その1）

- 複数不可分財のオークションにおいて，
  与えられた財の価格が均衡価格か否かを判定

定義：財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は 均衡価格
⇔ 以下の条件を満たす財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在
ただし $q(i) \equiv \max_{1 \le h \le n} \{v(i,h) - p(h)\}$

① 入札者 i に財 j が割り当てられる（$\alpha(i) = j$）
➔ $0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)$
② 入札者 i に財の割り当てがない（$\alpha(i) = 0$） ➔ $q(i) \le 0$
③ 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

- 条件②，③は対偶をとると わかりやすい

②’ 入札者 i に財の割り当てがある（$\alpha(i) \ne 0$） ⇐ $q(i) > 0$
③’ 財 j は誰かに割り当てられる ⇐ $p(j) > 0$

応用：均衡価格の判定（その2）

マッチングを用いて，均衡価格の定義の書き換えが可能

定義：財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は 均衡価格

⬅➡ 頂点集合 B∪N，枝集合 E の二部グラフにおいて，
頂点集合 B'∪N' をカバーするマッチングが存在

$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}$, $N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\}$,

$E = \{(i,j) \mid i \in B, j \in N,\ 0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)\}$

① 入札者 i に財 j が割り当てられる（$\alpha(i) = j$）

➡ $0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)$

②' 入札者 i に財の割り当てがある（$\alpha(i) \neq 0$）⬅ $q(i) > 0$

③' 財 j は誰かに割り当てられる ⬅ $p(j) > 0$

マッチングの枝は
Eに含まれる

マッチングは
B'をカバーする

マッチングは
N'をカバーする

応用: 均衡価格の判定（その3）

- B’, N’ を同時にカバーするマッチングが存在
  ←→ B’ をカバーするマッチングが存在
  & N’ をカバーするマッチングが存在（証明は後日）

- B’ をカバーするマッチングの存在判定は
  最大マッチング問題に帰着可能

(1) 二部グラフ(B, N; E) から，B-B’ に含まれる頂点
　　およびそれらに接続する枝を削除

(2) 得られたグラフの最大マッチング M を求める

(3) |M| = |B’| ならば B’ はカバー可能.
　　|M| < |B’| ならばB’ はカバー不可能.

応用: 均衡配分の計算

均衡価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が既知のとき,
均衡配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ を求めたい

均衡配分の条件:指定頂点をカバーするマッチング

配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は均衡配分
←→ 対応するマッチングは
頂点集合 B∪N, 枝集合 E の二部グラフにおいて,
頂点集合 B′∪N′ をカバーするマッチング

$$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}, \qquad N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\},$$
$$E = \{(i,j) \mid i \in B, j \in N,\ 0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)\}$$

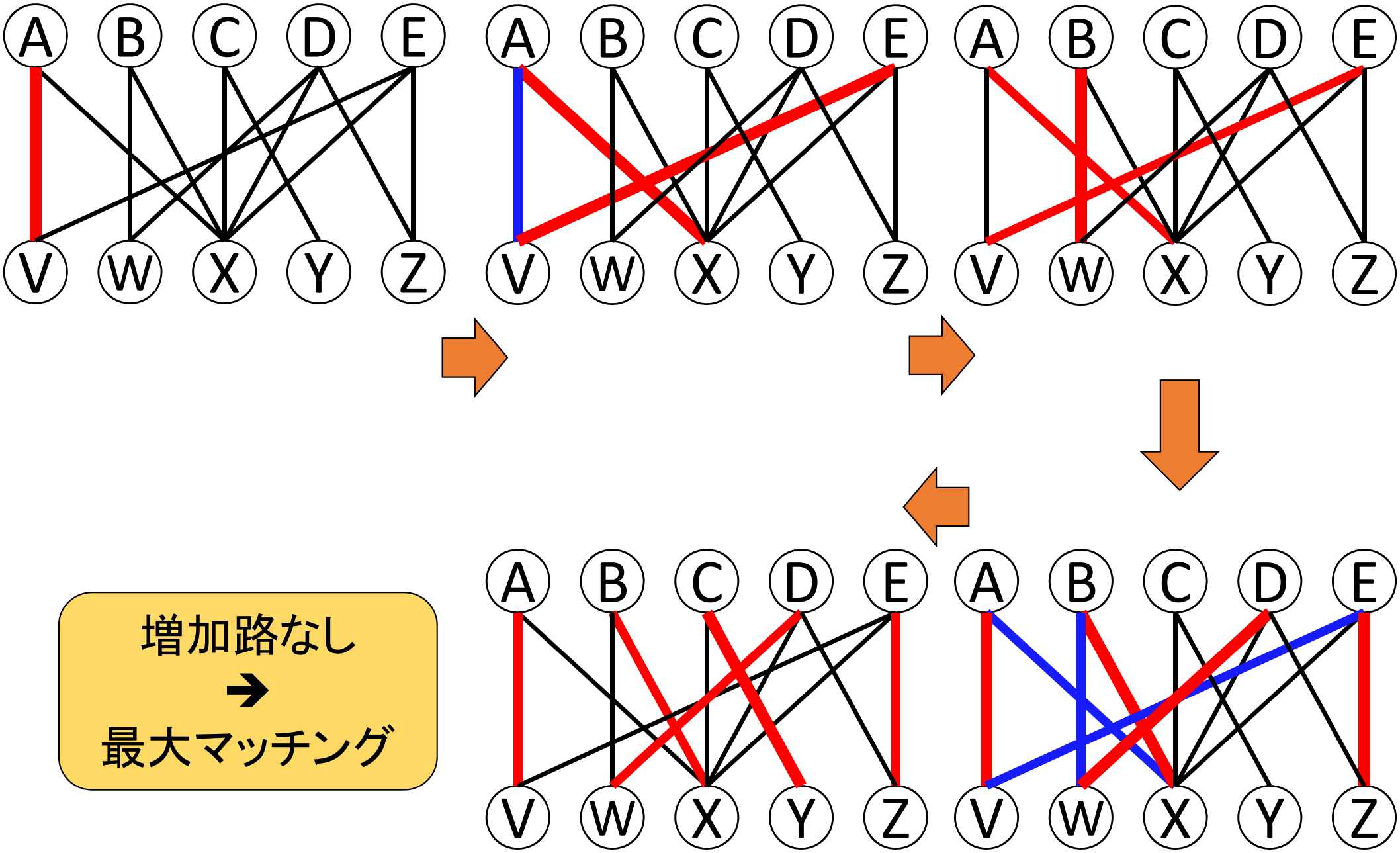
最大マッチングの計算

最大マッチング問題のアルゴリズム

「Mは最大マッチング🡐🡒Mに関する増加路が存在しない」
これに基づき，次のアルゴリズムが得られる

ステップ0：初期マッチングを$M := \emptyset$とする.
ステップ1： Mに関する増加路の存在をチェック.
存在しない🡒現在のMは最大マッチング（終了）
存在する🡒ステップ2へ.
ステップ2：Mに関する増加路 P をひとつ見つけ，
P を用いて M を更新（ $M := (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$）
ステップ1へ.

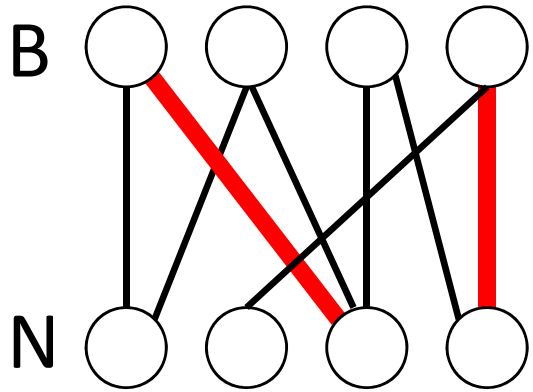
アルゴリズムの実行例



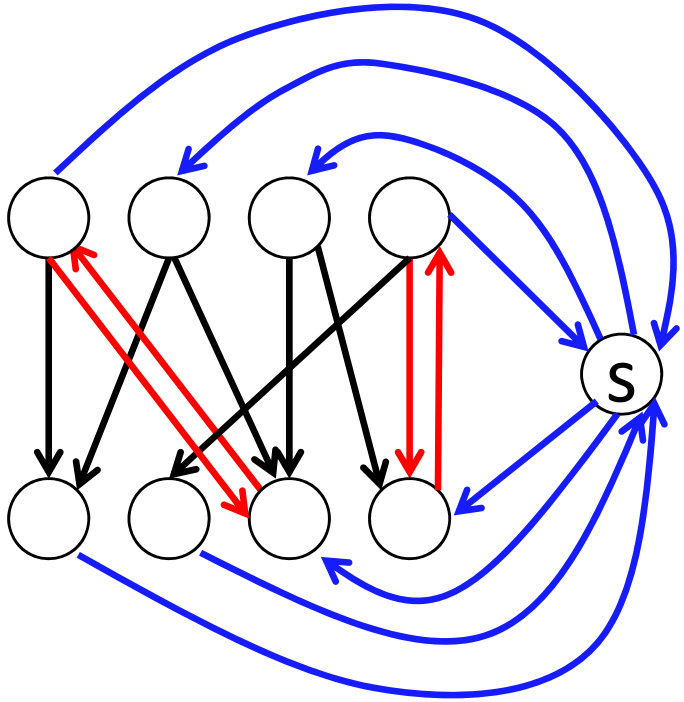
増加路なし
➔
最大マッチング

増加路の見つけ方：準備

増加路の検出→ある有向グラフでの
有向（閉）路の検出に帰着可能



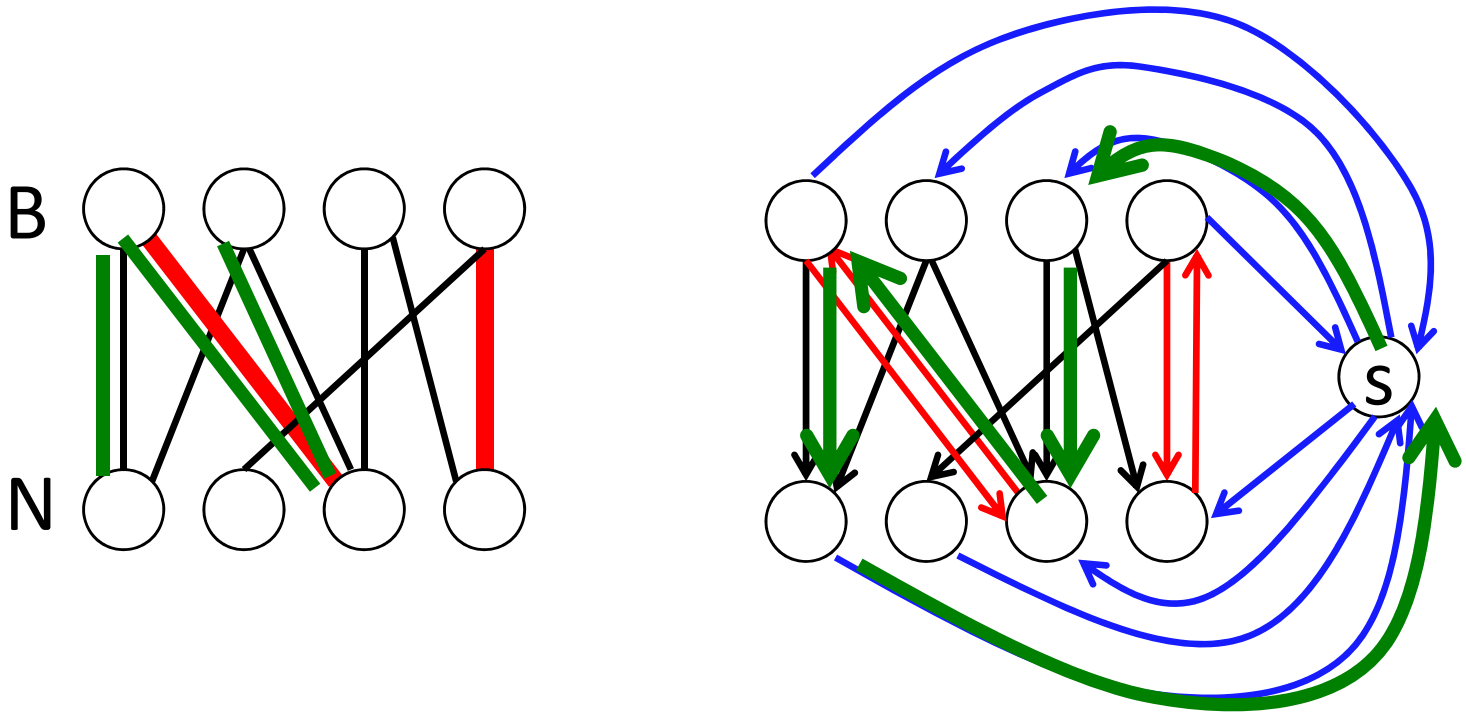
- 全ての枝を，B 側から N 側に向き付け
- マッチングMの各枝に対し，さらに
  逆向きの枝（N→B）を追加
- 新たな頂点 s をおく
- B 側の各頂点 u に対し，
  - マッチング枝が接続➔枝 (u,s) をおく
    接続なし➔ (s,u)をおく
- N 側の各頂点 v に対し，
  - マッチング枝が接続➔枝 (s,v) をおく
    接続なし➔ (v,s)をおく



増加路の見つけ方

- 新しい有向グラフにおいて，
  頂点 s → B 側の頂点 → … → N側の頂点→頂点 s　の形の有向閉路
  ←→ 元の二部グラフの（Mに関する）増加路

∴有向グラフにおいて，上記のような有向閉路を求めればよい



有向閉路と交互路の関係

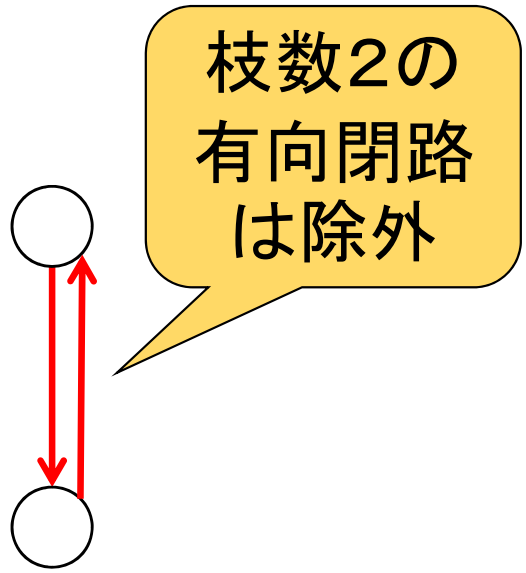
- 新しい有向グラフの有向閉路（のほとんど）は，
  元の二部グラフの交互路と対応

(1) 頂点 s → B 側の頂点 → … → N 側の頂点→頂点 s の形の有向閉路
　⇔ 元の二部グラフの増加路（タイプ１）

(2) 頂点 s → N 側の頂点 → … → B 側の頂点→頂点 s の形の有向閉路
　⇔ 元の二部グラフの「減少路」（タイプ２）

(3) 上記以外で，頂点 s を通過する有向閉路
　⇔ 元の二部グラフのタイプ3の交互路

(4) 頂点 s を通過しない（枝数4以上の）有向閉路
　⇔ 元の二部グラフの交互閉路



指定頂点をカバーするマッチング

カバーする頂点の制約（片側）

カバーする頂点の制約付きマッチングに関する性質

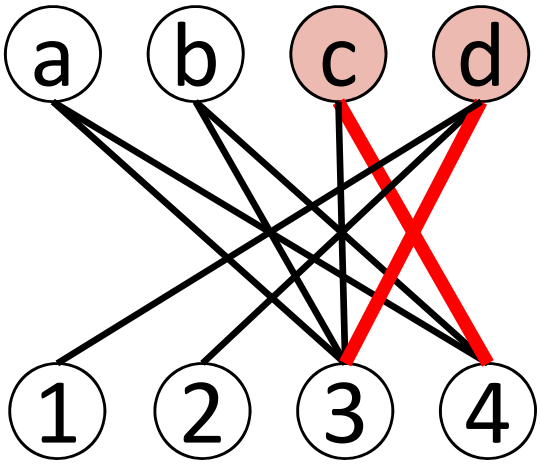
命題1

(i) B の部分集合 B’ に対し，B’ をカバーするマッチングが存在

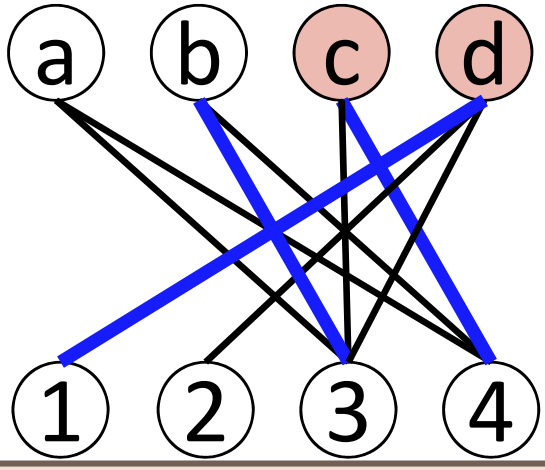
➔B’をカバーする最大マッチングが存在

(ii) N の部分集合 N’ に対し，N’ をカバーするマッチングが存在

➔N’をカバーする最大マッチングが存在



赤いマッチングは
B’={c,d} をカバーする



青いマッチングは
最大マッチング

カバーする頂点の制約（片側）

命題1

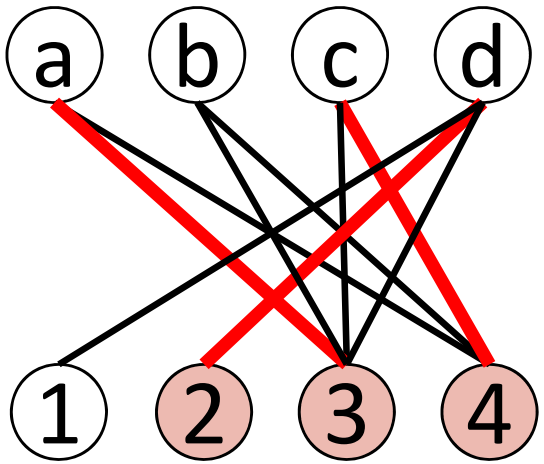
(i) B の部分集合 B’ に対し，B’ をカバーするマッチングが存在
➔B’をカバーする最大マッチングが存在

(ii) N の部分集合 N’ に対し，N’ をカバーするマッチングが存在
➔N’をカバーする最大マッチングが存在

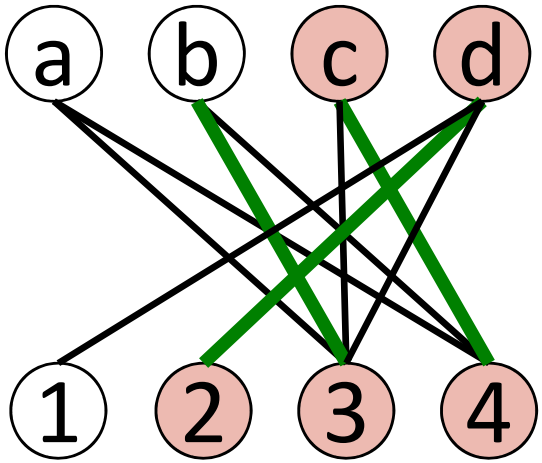
[証明] M: B’ をカバーするマッチング
M に増加路アルゴリズムを適用し，最大マッチング M* を求める
増加路アルゴリズムの各反復において，
マッチングのカバーする頂点は単調増加（減らない）
∴ M*のカバーする頂点 ⊇ M のカバーする頂点 ⊇ B’ ■

カバーする頂点の制約（両側）

命題2　B の部分集合 B’ および N の部分集合 N’ に対し，
B’ をカバーするマッチング，および N’ をカバーするマッチングが
それぞれ存在
➔B’ と N’を同時にカバーする（最大）マッチングが存在



赤いマッチングは
N’={2,3,4} をカバーする
最大マッチング



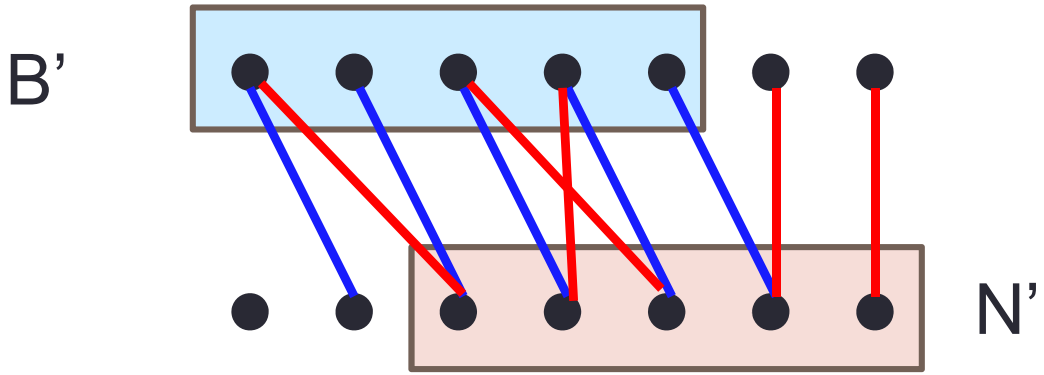
このマッチングは
B’={c,d}, N’={2,3,4}を同時に
カバーする最大マッチング

カバーする頂点の制約(両側)

命題2　B の部分集合 B' および N の部分集合 N' に対し,
B' をカバーするマッチング, および N' をカバーするマッチングが
それぞれ存在
➔B' と N'を同時にカバーする(最大)マッチングが存在

[証明]

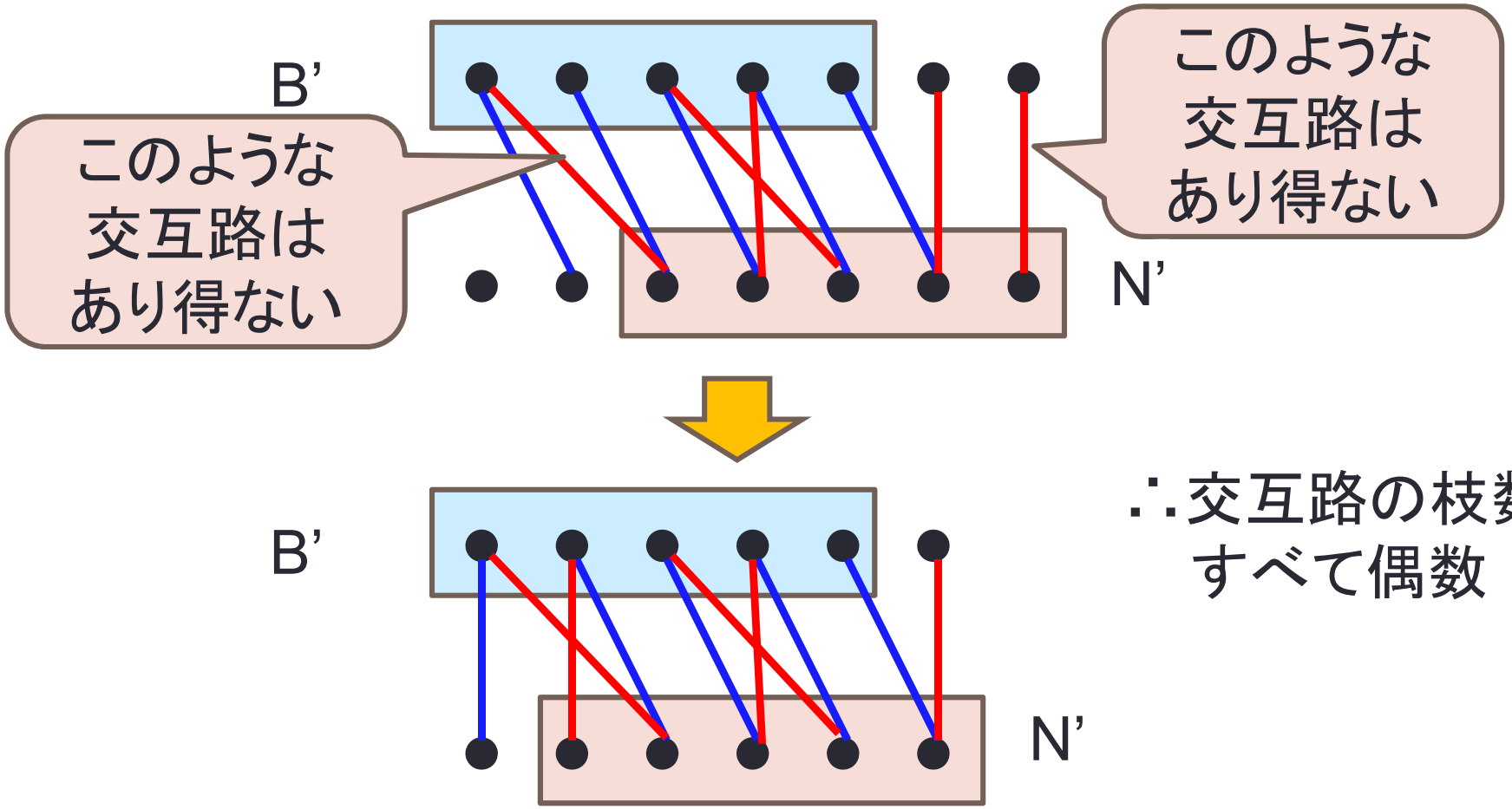
- M: B' をカバーする最大マッチング(命題1(i)より存在)
- そのようなマッチングの中で, カバーする N' の頂点数が最大とする
- M が N' すべてをカバーしていないと仮定 → 矛盾を導く
- M*: N' すべてをカバーする最大マッチング



カバーする頂点の制約（両側）

[証明のつづき]

- 枝集合 M∪M* からなるグラフ → 交互路と交互閉路に分解できる
  - M に関する増加路なし，M* に関する増加路なし
    （M, M* ともに最大マッチングだから）

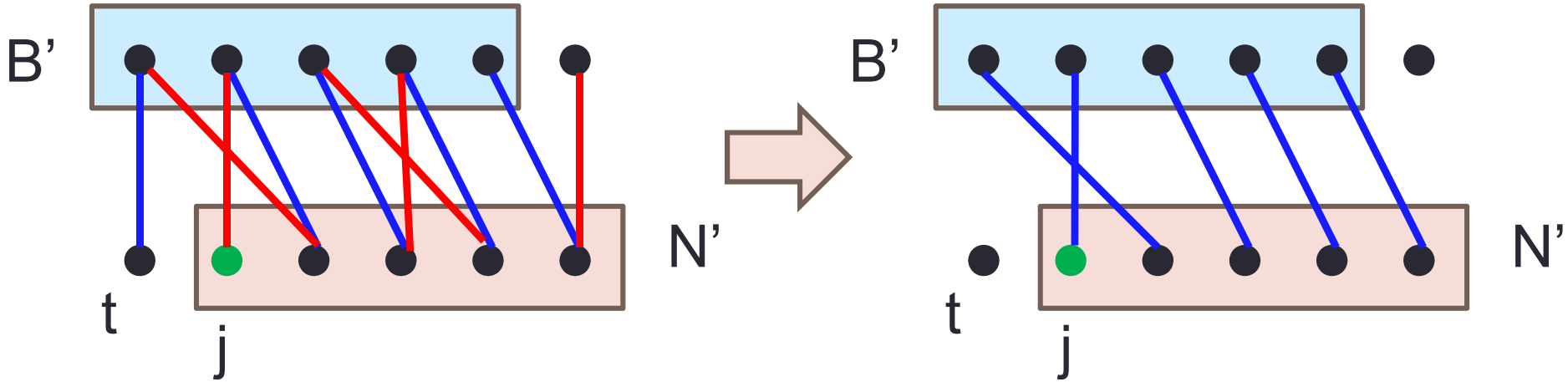


∴交互路の枝数は
すべて偶数

カバーする頂点の制約(両側)

[証明のつづき]

- j∈N': マッチング M でカバーされていない頂点



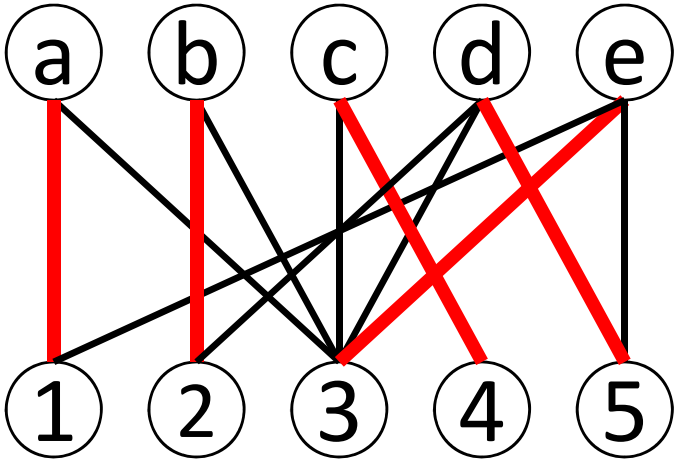
- j はマッチング M* でカバーされている
  → j から始まる交互路 P が存在, M* の枝から始まる
- 交互路 P の枝数は偶数
  → 最後の枝は M, 最後の頂点 t は N' に含まれない
  (∵ t∈N' → t に接続する M* の枝が存在 → 交互路は終わらない)

∴ 交互路 P を使って M の枝を入れ替え → j がカバーされる
→ カバーできる N' の頂点数が増える(矛盾)

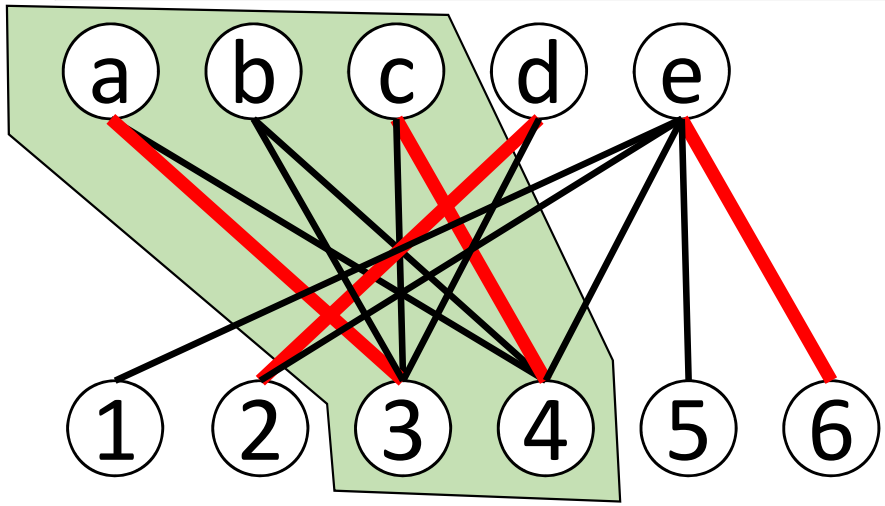
指定頂点集合をカバーするマッチング：存在するための必要条件

所与の B’⊆B をカバーするマッチングは存在するか？

B’={a,b,c,d,e}をカバー可能



B’={a,b,c,d,e}をカバー可能？



命題

ある X⊆B’に対し，

X の隣接頂点の数 ＜ |X|

➔ B’ すべてをカバーする

マッチングは存在しない

a,b,c の隣接頂点 = {3,4}

∴ a,b,cのうち，高々2つしか

カバーできない

→ B’ はカバーできない

指定頂点集合をカバーするマッチング：存在するための必要十分条件

命題 ある X⊆B'に対し， X の隣接頂点の数 ＜ |X|
➔ B' すべてをカバーするマッチングは存在しない
（対偶：B' すべてをカバーするマッチングが存在
➔ 任意のX⊆B'に対し， X の隣接頂点の数 ≧ |X|

逆も成り立つ

定理（Hall（ホール）の定理）
B' すべてをカバーするマッチングが存在
⟷ 任意のX⊆B'に対し， X の隣接頂点の数 ≧ |X|

ホールの定理：証明

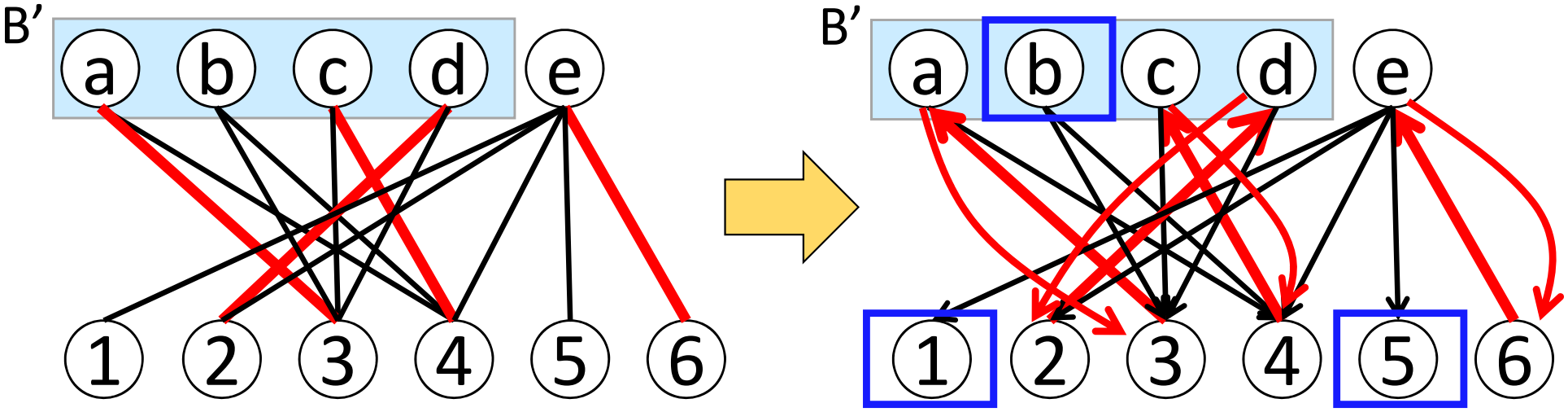
[🡸] 対偶「B′ すべてをカバーするマッチングは存在しない

→ ある $X \subseteq B'$ に対し，　|X|> Xに隣接する頂点の数」を証明

- M: マッチング, カバーする B′ の頂点数が最大
- M に関する有向グラフを作成

（マッチングの枝：両方向きの枝，それ以外：下向きの枝）

- S⊆B′: マッチング枝が接続していない B′ の頂点集合
- T⊆N: マッチング枝が接続していない N の頂点集合



ホールの定理：証明のつづき

Mのカバーする B’ の頂点数は最大

→ S の頂点から始まる，Mに関する増加路は存在しない

（∵存在する → カバーできる B’ の頂点数が増える）

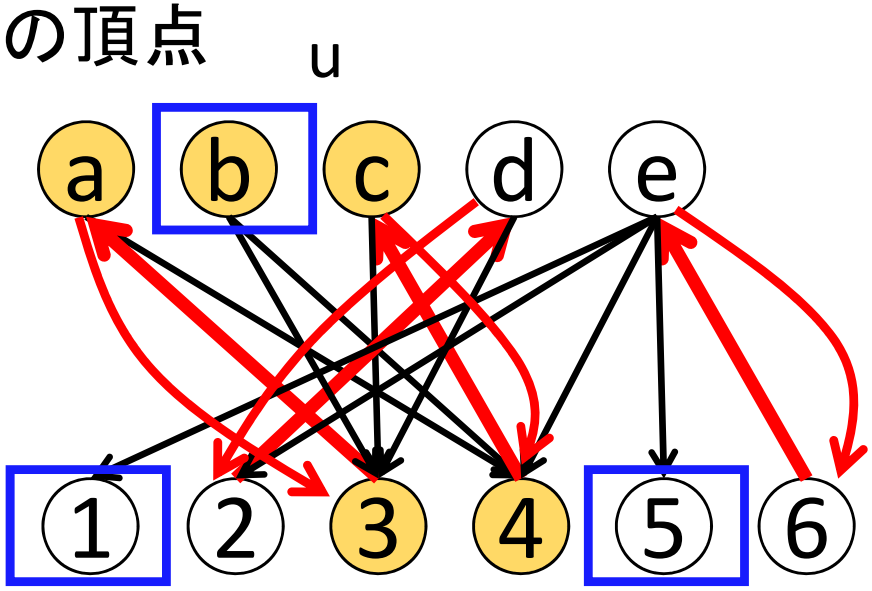
→ 有向グラフで S から T への有向路が存在しない

仮定より，S は非空 → u∈S とする.

X⊆B’: 有向グラフで u から到達可能な B’ の頂点

Y⊆N: 有向グラフで u から到達可能な N の頂点

→ 二部グラフで X に隣接する頂点＝ Y



ホールの定理：証明のつづき

また $Y \cap T = \emptyset$ （∵ u から始まる増加路が存在しない）

→ Y の各頂点にはマッチング枝が接続

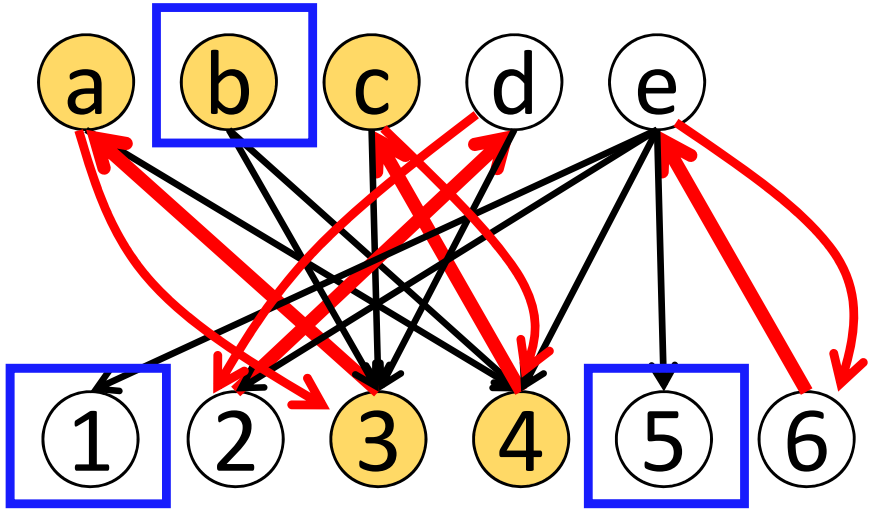
$Z \subseteq B'$: マッチング M での Y の「相手」

→ $Z \subseteq X$, $|Z| = |Y|$

さらに $u \notin Z$, $u \in X$

∴ $|X| \geqq |Z| + 1 > |Y|$

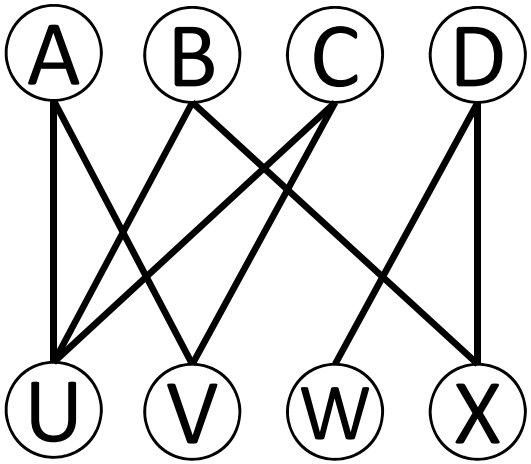
= Xに隣接する頂点数



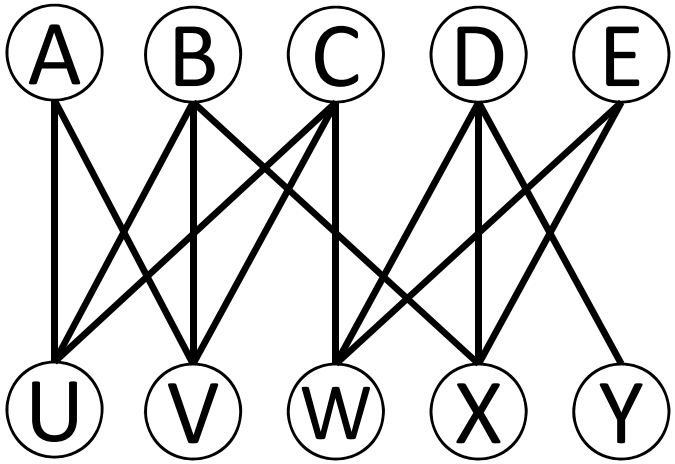
演習問題

問1：以下のグラフの最大マッチングを，前のスライドのアルゴリズムにより求めよ．各反復でのマッチングと使った増加路を（図を使って）明記すること．
（増加路の求め方を説明する必要なし）

（1）



（2）



演習問題

問2：下記の赤丸で与えられる財の配分が均衡配分か否かを，
以下の手順で判定せよ．

（1） 与えられた配分が均衡配分であるための条件を不等式で書け．

（2）得られた不等式条件に対応するグラフを書け．

（3）得られたグラフにおける最短路問題を解いて，
不等式条件を満たす解（財の価格）を求めるか，　もしくは
負閉路および対応する不等式を求めよ．

（i）

v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

（ii）

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8