

数理経済学特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第3回

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

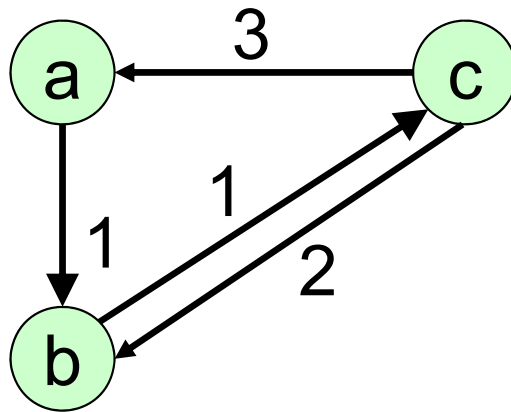
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

ポテンシャルと負閉路

最短路問題における
便利な道具

定義: 実数 $p(v) (v \in V)$ はポテンシャル

↔ 各枝 (u, v) に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v)$ を満たす



$p(a) = 3, p(b) = 2, p(c) = 0$ はポテンシャル

※ポテンシャルは存在しないこともある
(例: (c, a) の枝長を -3 にした場合)

命題 ポテンシャルは存在 → 負閉路は存在しない
(対偶: 負閉路が存在 → ポテンシャルは存在しない)

(証明) 任意の閉路 C に対し,

不等式 $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v) ((u, v) \in C)$ を辺々足す

→ $0 = \sum_{(u,v) \in C} [p(v) - p(u)] \leq \sum_{(u,v) \in C} \ell(u, v) = \text{閉路の長さ}$

ポテンシャルと負閉路と最短路

命題 ポテンシャルは存在 $\leftarrow$ 負閉路は存在しない
 (対偶: 負閉路が存在 $\leftarrow$ ポテンシャルは存在しない)

(証明) ある頂点をひとつ選び, s とする.

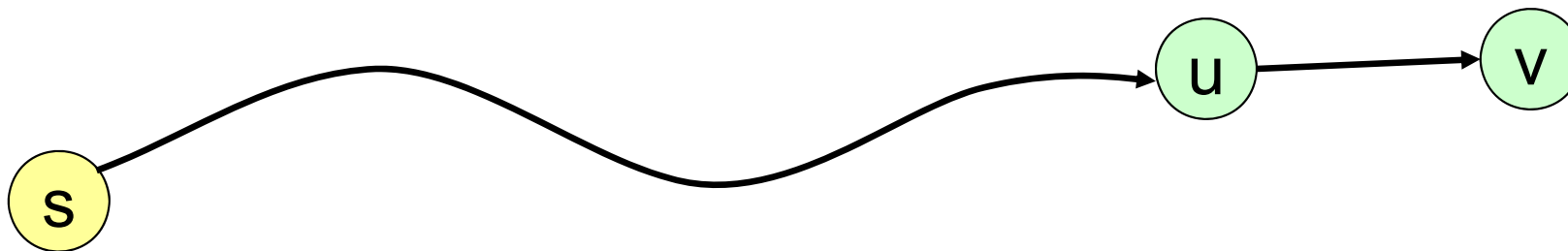
各頂点 v に対し, s から到達不可能ならば,

枝 (s,v) を新たにおき, 長さ=十分大きい正数 とする

→ 修正後のグラフの各頂点は s から到達可能, 負閉路が存在しない

∴ s から各頂点への最短路が存在

$d(v) = s$ から頂点 v への最短路長 とする $\leftarrow$ ポテンシャルになる



任意の枝 (u,v) に対し, P : 頂点 s から u への最短路 とおく

→ $\tilde{P} = P \cup \{(u,v)\}$ は s から v への路,

その長さ = $d(u) + \ell(u,v) \geq v$ への最短路長 = $d(v)$

ポテンシャルの計算

前のスライドの命題および証明より,

グラフに負閉路が存在しない

→ ポテンシャルは必ず存在し, 計算可能

計算方法:

(1) 証明と同様にグラフを修正

(2) 修正後のグラフにおいて, s から各頂点への最短路長を求める

最短路の計算

最短路長の求め方

- ベルマン・フォードのアルゴリズム(R. Bellman(1958), L. Ford, Jr.(1956))
- 各反復で, 次の値を計算

$d_k(v)$ = 枝数が k 以下の s から v への路の中で, 最短なもの長さ

このような路は, 2つのパターンあり

(1) 枝数が $k-1$ 以下 $\Rightarrow d_k(v) = d_{k-1}(v)$

(2) s からある頂点 u への路(ただし枝数 $\leq k-1$) + 枝(u, v)

$$\Rightarrow d_k(v) = d_{k-1}(u) + \ell(u, v)$$



$\therefore$ 次の再帰式が成立

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) | (u, v) \in E\}]$$

負閉路の存在のチェック

再帰式 $d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) \mid (u, v) \in E\}]$
 は $k=n$ の場合でも成り立つ ($n=|V|$)

負閉路が存在しない場合

- 各頂点 v への最短路が存在する
- 枝数 $\leq |V|-1$ の最短路が存在 (命題より)
- **全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ が成立**

負閉路 C が存在する場合

- **ある v に対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$ が成立**

(証明) すべての v に対して等号成立と仮定.

再帰式の定義より

$$d_n(v) = d_{n-1}(v) \leq d_{n-1}(u) + \ell(u, v) \quad (\forall (u, v) \in E)$$

- $d_{n-1}(v)$ はポテンシャル

- 負閉路が存在しない (前のスライドの命題より) (矛盾)

} これを使って
負閉路を検出

ベルマン・フォードのアルゴリズム

手順0: $d_0(s) = 0, d_0(v) = +\infty (\forall v \neq s)$ とおく. $k=1$ とする.

- s から枝数0でたどり着けるのは s のみなので

手順1: 各頂点 v に対し, 以下の式で $d_k(v)$ を計算

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) \mid (u, v) \in E\}]$$

手順2: $k < |V|$ ならば $k:=k+1$ とおいて手順1へ戻る.

$k=|V|$ ならば手順3へ.

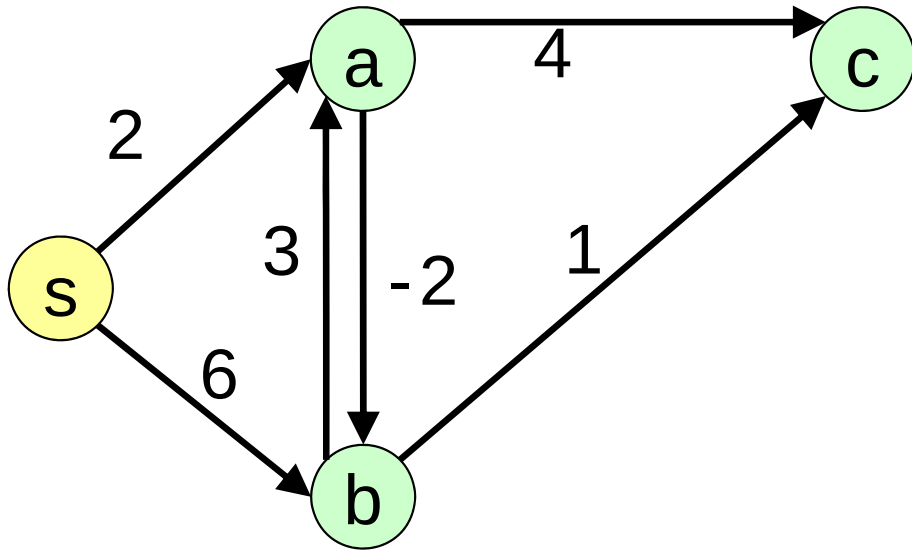
手順3: ある v に対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$ が成立 $\rightarrow$ 「負閉路存在」

全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ が成立

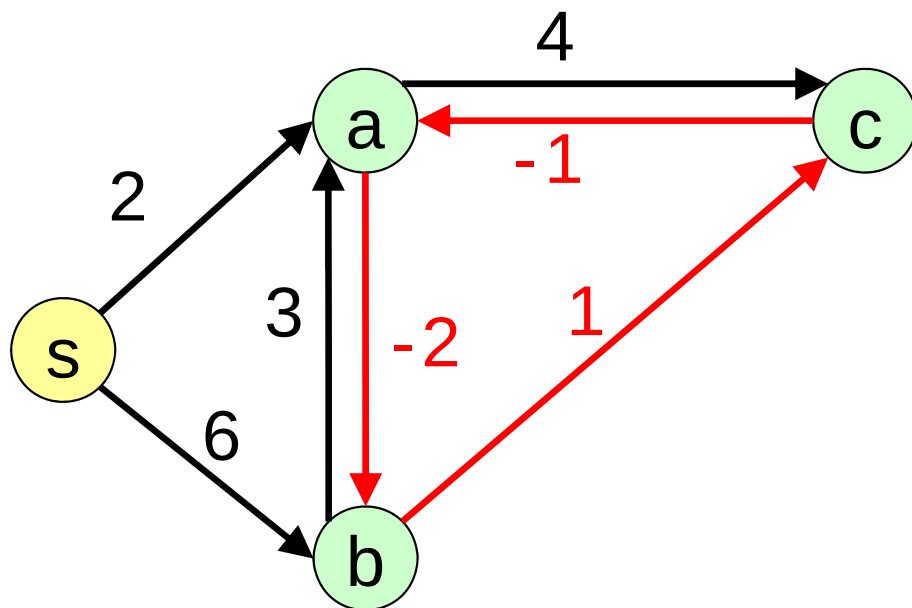
$\rightarrow$ 最短路長 $d_{n-1}(v)$ を出力

最短路長だけでなく, 最短路を計算することも
(若干の修正により) 可能である

実行例



	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	2	2	2	2
b	∞	6	0	0	0
c	∞	∞	6	1	1



	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	2	2	2	0
b	∞	6	0	0	0
c	∞	∞	6	1	1

差分不等式系の解の計算

差分不等式系の解を求める: ケース1

変数は $p_1, p_2, \dots, p_n$ と仮定

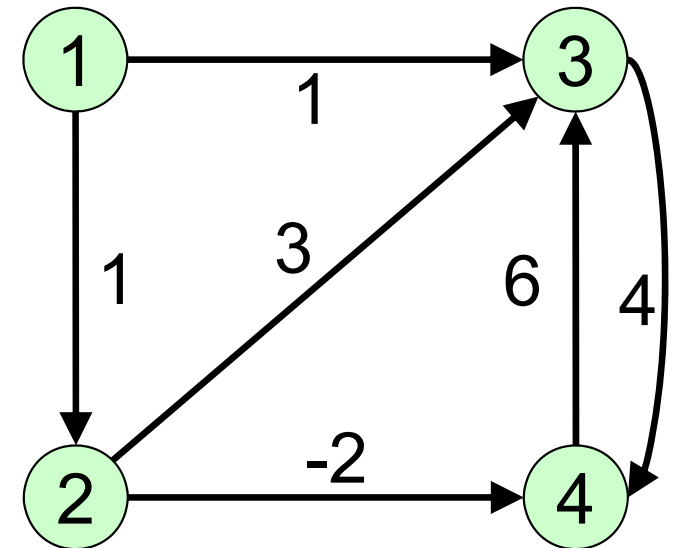
ケース1: 全ての制約に2つの変数が現れる場合

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, p_3 - p_1 \leq 1, \\ p_3 - p_2 &\leq 3, p_4 - p_2 \leq -2, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, p_3 - p_4 \leq 6 \end{aligned}$$

不等式系の解

= 次のグラフのポテンシャル

- 各変数に対応する頂点を追加
- 各制約 $p_v - p_u \leq \alpha$ に対し,
長さ = α の枝 (u, v) を追加



作成したグラフに

負閉路存在 $\rightarrow$ ポテンシャルは存在しない $\rightarrow$ 解なし
 負閉路なし $\rightarrow$ ポテンシャル存在, 計算可能

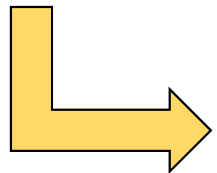
差分不等式系の解を求める: ケース2

ケース2: 一般の場合

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, p_3 - p_1 \leq 1, \\ p_3 - p_2 &\leq 3, p_4 - p_2 \leq -2, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, p_3 - p_4 \leq 6, p_1 \leq 0, p_4 \geq 3 \end{aligned}$$

変数1つの不等式を, 変数2つの不等式に変換 → ケース1に帰着

- 新しい変数 p_0 を追加
- 変数1つの不等式を書き換え
 - $p_v \leq \beta$ の形の不等式 → $p_v - p_0 \leq \beta$ に置き換え
 - $p_v \geq \gamma$ の形の不等式 → $p_0 - p_v \leq -\gamma$ に置き換え



元の不等式系に解が存在

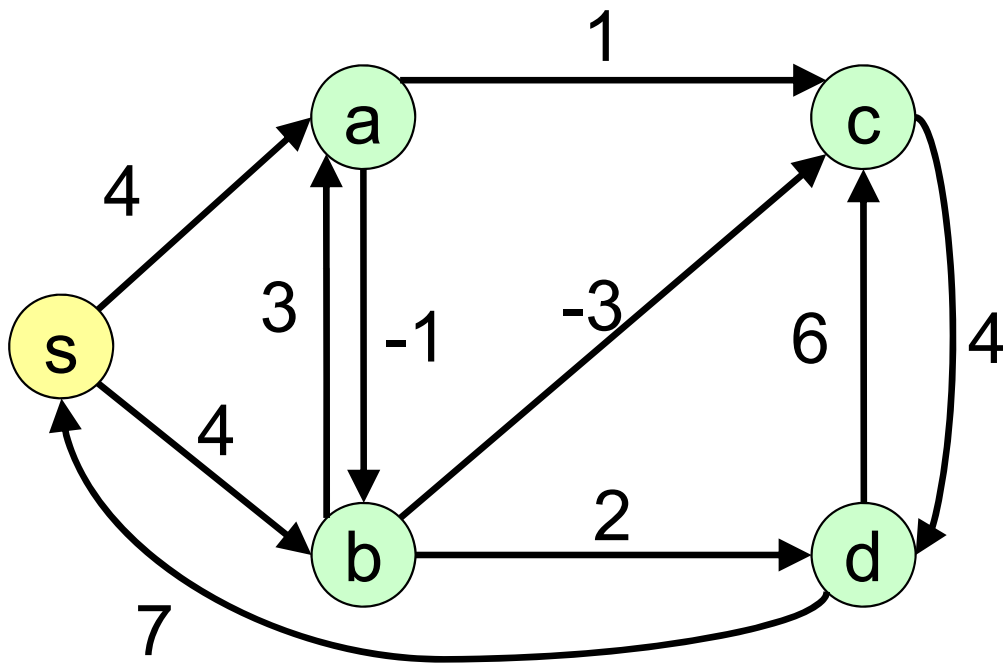
↔ 新しい不等式系に $p_0 = 0$ なる解が存在

↔ 新しい不等式系に解が存在

要証明

演習問題

問1: 下記のグラフにおける, s から各頂点への最短路長を, ベルマン・フォードのアルゴリズムで計算せよ.



	k=0	1	2	3	4	5
s	0					
a	$+\infty$					
b	$+\infty$					
c	$+\infty$					
d	$+\infty$					

演習問題

問2: 下記のように評価値が与えられたときの均衡価格を, 以下の手順で求めよ.

(1) (i), (ii), (iii) それぞれに対し, 均衡の条件を不等式で書け.

ただし, 均衡配分は赤丸で示されたものを使うこと.

(2) 得られた不等式条件に対応するグラフを書け.

(3) 得られたグラフにおける最短路問題を解いて, 不等式条件を満たす解
(均衡価格)を計算せよ.

(4) 得られた解が均衡価格の条件を満たしていることを確認せよ.

(i)

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

(ii)

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

(iii)

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

枝長が正の場合の最短路長の計算

枝長が正の場合の最短路長

各枝の長さが正のときの最短路の性質

- 最短路長 ≤ 0 となるのは, s から s への最短路のみ
- 任意の $v \neq s$ に対し, ある頂点 u が存在して,

s から v への最短路 = s から u への最短路 + (u, v)

s から v への最短路長 $> s$ から u への最短路長

$\therefore$ 最短路長は, 小さい順に計算すると便利

- v_i への最短路長 = i 番目に小さい最短路長 とおく

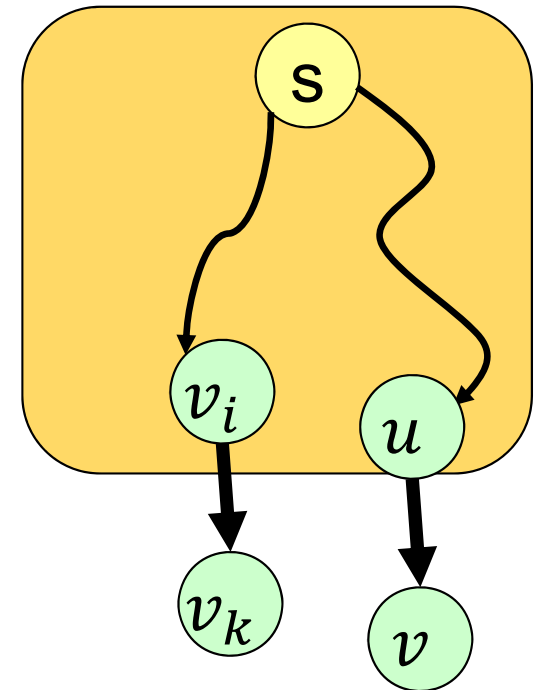
$\rightarrow v_1 = s$

v_k への最短路 = ある i ($\leq k-1$) が存在して,

v_i への最短路 + (v_i, v_k)

v_j ($j > k$) への, $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ 経由の最短路長

$\geq v_j$ への (条件なし) 最短路長 $\geq v_k$ への最短路長



ダイクストラのアルゴリズム

手順0: $d(s) = 0, d(v) = +\infty (\forall v \neq s)$ とおく. $T=V$ とする.

手順1: T の要素 u で $d(u)$ 最小のものを選ぶ.

$T := T - \{u\}$ とおく.

手順2: u から出る各枝 (u,v) に対し,

$v \in T$ かつ $d(v) > d(u) + \ell(u, v)$ ならば,

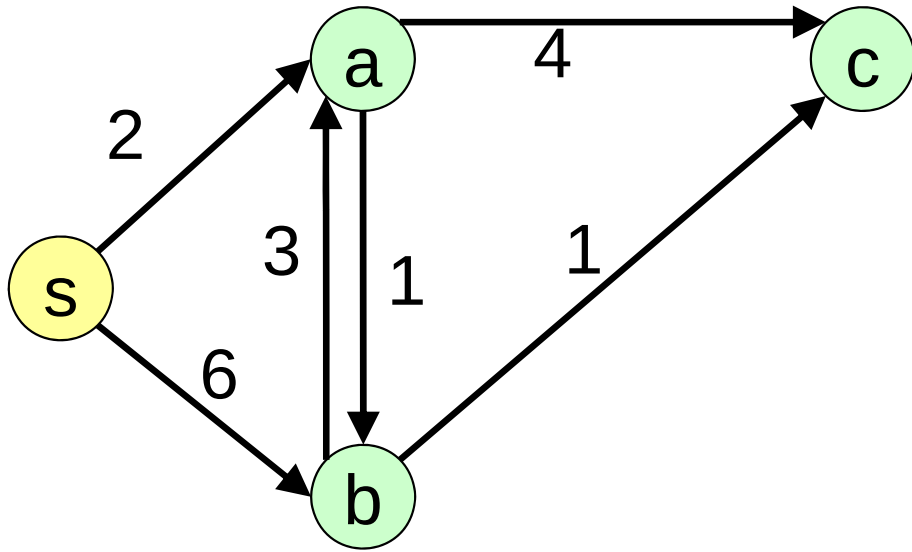
$d(v) := d(u) + \ell(u, v)$ とおく.

手順3: $T = \emptyset \rightarrow$ 各 v に対して $d(v)$ を出力.

$T \neq \emptyset \rightarrow$ 手順1へ.

最短路長だけでなく, 最短路を計算することも
(若干の修正により) 可能である

実行例



	k=0	1	2	3
s	0	0	0	0
a	∞	2	2	2
b	∞	6	3	3
c	∞	∞	6	4